MP **Sujet 1** Corrigé dès vendredi sur:
Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Déterminer les éléments propres de la matrice de taille n (entier supérieur à 2) ne contenant que des 1.

Exercice 1

Banque CCINP : Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. **Indication** : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ ev E de dimension finie.
   (a) On suppose que 0 est une valeur propre de f^2, montrer que f n'est pas surjective.
   (b) On suppose que 0 n'est pas une valeur propre de f, montrer que f est un automorphisme et expliciter les valeurs propres de son inverse.
2. Soient E l'espace des fonctions numériques et continues sur $\mathbb{R}$ et I l'endomorphisme de E qui à une fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Expliciter le spectre de I.

MP **Sujet 2** Corrigé dès vendredi sur:
Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Déterminer le polynôme caractéristique d'un projecteur p d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soient E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et Δ l'endomorphisme de E défini par :
$$\Delta : u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
   (a) Vérifier que E est un espace vectoriel et que Δ est un endomorphisme de E.
   (b) Expliciter le spectre de Δ.
   (c) Δ est-il injectif ?
2. Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec n un entier naturel non nul. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques
$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$
   (a) Établir l'égalité quand $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
   (b) Pour $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, justifier que $A + \frac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour p entier naturel assez grand.
   (c) En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

MP **Sujet 3** Corrigé dès vendredi sur:
Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Déterminer χ_A et π_A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

Banque CCINP : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)\ .$$

2.(a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

(b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soient a et b deux réels, on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. On admet que $M(a,b)$ a trois valeurs propres. Expliciter les ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. Soient E l'espace des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}_+$ convergeant en $+\infty$ et T l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}_+, (T(f))(x) = f(x+1).$$

Expliciter le spectre de T ainsi que ses vecteurs propres.