TD 7 - Énergétique du point

Les questions précédées d'une * sont à faire en seconde lecture, ou si vous avez de l'avance.

1 Patinage et looping - III

Un adepte du patinage, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au-dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet (figure 1). Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.

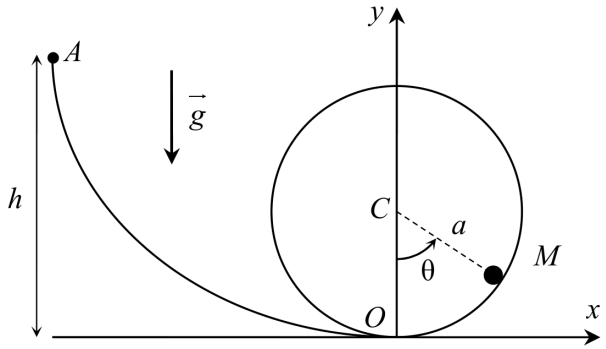


FIGURE 1 – Schéma du problème étudié

1. Déterminer la norme de la vitesse v_0 du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque de la rampe repéré par son angle θ.
3. *Montrer que la réaction du support cylindrique sur le patineur se met sous la forme

$$\vec{R} = -mg(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2)\vec{e}_r \tag{1}$$

4. Que se passe-t-il si la vitesse v du patineur devient nulle (avec R non nulle) ? Répondre sans calcul.
5. *Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui devient nulle alors que v est non nulle ?
6. Déterminer la valeur minimale de la hauteur h nécessaire pour que le patineur puisse faire un tour complet.

2 Équilibre d'un système masse-ressort - III

Le point M, de masse m, est attaché à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, et peut se déplacer sans frottement le long de l'axe Ax (figure 2). Le point O est fixe. On note $AO = a$.

1. Que dire de l'énergie potentielle de pesanteur de M au cours du mouvement ?

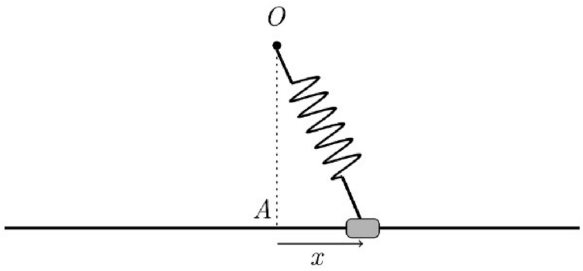


FIGURE 2 – Schéma du problème

2. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m.
3. Étudier les positions d'équilibre possibles pour M.
4. *Étudier leur stabilité en distinguant les cas $a > l_0$ et $a < l_0$. On pourra pour cela tracer dans ces deux cas la courbe $E_p(x)$.
5. *On étudie alors les oscillations autour de O dans le cas où $a > l_0$. Établir l'équation différentielle du mouvement.

3 Ressorts inclinés - IV

On considère le dispositif représenté sur la figure 3, une masse est attachée entre deux ressorts identiques de raideur k, de longueur à vide l_0, le tout étant posé sur un plan incliné d'un angle φ par rapport à l'horizontale. La distance séparant les points d'attache des ressorts est égale au double de leur longueur à vide. Les frottements sont négligés.

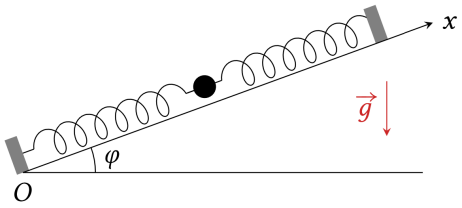


FIGURE 3

La masse m est lâchée depuis le milieu du dispositif sans vitesse initiale. À l'aide du théorème de la puissance mécanique, déterminer $x(t)$.