TD 7 - Correction

Les questions précédées d'une * sont à faire en seconde lecture, ou si vous avez de l'avance.

1 Patinage et looping - III

Un adepte du patinage, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au-dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet (figure 1). Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.

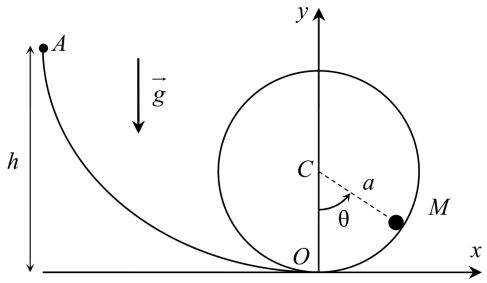


FIGURE 1 – Schéma du problème étudié

1. Déterminer la norme de la vitesse v_0 du patineur lorsqu'il arrive au point O.

Réponse

On va utiliser le théorème de l'énergie mécanique (équivalent à utiliser le théorème de l'énergie cinétique). On se place dans le référentiel terrestre galiléen et on étudie le patineur de masse m. Le patineur est soumis à son propre poids qui est une force conservative associée à l'énergie potentielle E_{pp}. La seule autre force est la réaction normale du support $\vec{R}$ qui ne travaille pas. L'énergie mécanique du patineur s'écrit

$$E_m = E_c + E_{\text{pp}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \tag{1}$$

l'axe Oy étant vertical vers le haut, l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur étant choisie au point O. Le patineur ne subissant aucune force non conservative, le théorème de l'énergie mécanique appliqué entre A et O donne

$$E_m(A) = E_m(O) \implies 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \tag{2}$$

d'où

$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{3}$$

2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque de la rampe repéré par son angle θ.

Réponse

Pour faire cela, on doit réussir à exprimer E_{pp} en fonction de θ donc exprimer la hauteur y du patineur en fonction de θ. Géométriquement, pour un point M de la rampe, repéra par son angle θ on a

$$y(\theta) = a(1 - \cos\theta) \tag{4}$$

On vérifie la cohérence de notre formule, on a bien $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = a$ et $y(\pi) = 2a$.
On fait maintenant de même que précédemment, en appliquant le TEM entre A et M

$$E_m(A) = E_m(M) \implies 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1-\cos\theta) \implies \frac{1}{2}mv^2 = mg(h - a(1-\cos\theta)) \tag{5}$$

finalement

$$v = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos\theta))} \tag{6}$$

on a $v \leq v_0$, une partie de l'énergie cinétique est à nouveau sous forme d'énergie potentielle de pesanteur. On retrouve bien $v = v_0$ pour $\theta = 0$.

3. *Montrer que la réaction du support cylindrique sur le patineur se met sous la forme

$$\vec{R} = -mg(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2)\vec{e}_r \tag{7}$$

Réponse

Pour déterminer une force on doit appliquer le principe fondamental de la dynamique. On étudie le patineur, dans le référentiel terrestre galiléen. Le long de la rampe, le mouvement est circulaire. Ainsi dans la base cylindrique centrée sur le centre du cylindre on a

$$\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos\theta))}\vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{8}$$

Le poids du patineur se projette dans cette base comme

$$\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \tag{9}$$

la réaction normale du support est $\vec{R} = R\vec{e}_r$.
Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au patineur et projeté sur $\vec{e}_r$ donne

$$-ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R \tag{10}$$

Or on remarque que

$$v = a\dot{\theta} \quad \text{et} \quad a_r = -a\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{a} \tag{11}$$

d'où

$$-m\frac{v^2}{a} = mg\cos\theta + R \implies R = -m(g\cos\theta - \frac{v^2}{a}) = -m\left(g\cos\theta - \frac{2g(h - a(1-\cos\theta))}{a}\right) \tag{12}$$

Finalement

$$R = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right) \tag{13}$$

4. Que se passe-t-il si la vitesse v du patineur devient nulle (avec R non nulle) ? Répondre sans calcul.

Réponse

Si il s'arrête en un point M d'angle $\theta \leq \pi/2$), il redescend la rampe et se met à osciller. Si il s'arrête en un point M d'angle $\theta \geq \pi/2$), il tombe alors de la rampe. Dans les deux cas il n'effectue donc pas le tour.

5. *Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui devient nulle alors que v est non nulle ?

Réponse

Le patineur quitte alors le sol de la rampe est est en *chute libre* jusqu'à ce qu'il touche à nouveau la rampe. Il n'effectue donc pas le tour **complet**.

6. Déterminer la valeur minimale de la hauteur h nécessaire pour que le patineur puisse faire un tour complet.

Réponse

Pour qu'il effectue le tour complet il faut donc que les deux cas de figure précédentes ne se présentent pas.
La première condition est donc

$$v \geq 0 \implies 2g(h - a(1 - \cos\theta)) \geq 0 \implies h \geq a(1 - \cos\theta)\ \forall\theta \tag{14}$$

la condition est donc

$$h \geq 2a \tag{15}$$

condition logique et prévisible : on doit partir d'un point plus haut que le point le plus haut du cylindre dont on veut faire le tour.
La seconde condition est

$$R \leq 0 \implies mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right) \geq 0 \implies 2h \geq a(2 - 3\cos\theta)\ \forall\theta \tag{16}$$

ce qui finalement s'écrit

$$h \geq \frac{5}{2}a \tag{17}$$

condition qui est plus stricte que celle établie précédemment. Pour qu'il puisse faire un tour complet il faut donc qu'il commence d'un point de hauteur $h \geq 5a/2$.

2 Équilibre d'un système masse-ressort - III

Le point M, de masse m, est attaché à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, et peut se déplacer sans frottement le long de l'axe Ax (figure 2). Le point O est fixe. On note $AO = a$.

1. Que dire de l'énergie potentielle de pesanteur de M au cours du mouvement ?

Réponse

Le mouvement étant à altitude constante, l'énergie potentielle de pesanteur sera également constante.

2. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m.

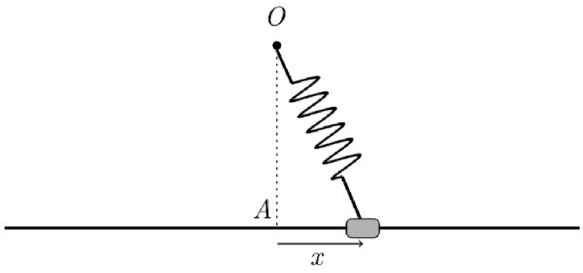


FIGURE 2 – Schéma du problème

Réponse

La seule autre force conservative est la force de rappel du ressort. L'énergie potentielle du système est donc l'énergie potentielle élastique plus une constante

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0) + c \tag{18}$$

avec l l'allongement du ressort et c une constante. On exprime ainsi l en fonction de x et a par Pythagore

$$l = \sqrt{x^2 + a^2} \tag{19}$$

d'où

$$E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - l_0)^2 + c \tag{20}$$

3. Étudier les positions d'équilibre possibles pour M

Réponse

Les positions d'équilibre vérifient

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{éq}}} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - l_0)^2 + c\right) = 0 \tag{21}$$

Donc par dérivation de u^2

$$k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2 + a^2} - l_0\right) \times (\sqrt{x^2 + a^2} - l_0) = 0 \tag{22}$$

et par dérivation de $\sqrt{u}$

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}(\sqrt{x^2 + a^2} - l_0) = 0 \implies x(\sqrt{x^2 + a^2} - l_0) = 0 \tag{23}$$

les positions d'équilibre sont donc

$$x_{\text{éq},1} = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_{\text{éq},2} + a^2} = l_0 \implies x_{\text{éq},2} = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2} \tag{24}$$

la seconde solution (qui correspond à deux positions d'équilibre symétriques) n'existe que si $a \leq l_0$.

4. * Étudier leur stabilité en distinguant les cas $a > l_0$ et $a < l_0$. On pourra pour cela tracer dans ces deux cas la courbe $E_p(x)$.

Réponse

On cherche maintenant à déterminer la stabilité de ces positions, on doit donc calculer la dérivée *seconde* de l'énergie potentielle. On a déjà

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \tag{25}$$

Le calcul (fastidieux) de la dérivée seconde donne

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = k\left(1 - \frac{a^2 l_0}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right) \tag{26}$$

— Pour $a \leq l_0$, étude de la stabilité de la position $x_{\text{éq}} = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_0 = k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \leq 0 \tag{27}$$

cette position est donc **instable**.
Étude des positions $x_{\text{éq},2}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\sqrt{l_0^2-a^2}} = 0 \implies k\left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right) \geq 0 \tag{28}$$

les positions d'équilibre en $x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ sont **stables** !

— Pour $a \geq l_0$ il n'y a que la position d'équilibre en $x = 0$ et alors

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_0 = k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right) \geq 0 \tag{29}$$

cette position est donc **stable**.

5. On étudie alors les oscillations autour de O dans le cas où $a > l_0$. Établir l'équation différentielle du mouvement.

3 Ressorts inclinés - IV

On considère le dispositif représenté sur la figure 3, une masse est attachée entre deux ressorts identiques de raideur k, de longueur à vide l_0, le tout étant posé sur un plan incliné d'un angle φ par rapport à l'horizontale. La distance séparant les points d'attache des ressorts est égale au double de leur longueur à vide. Les frottements sont négligés.

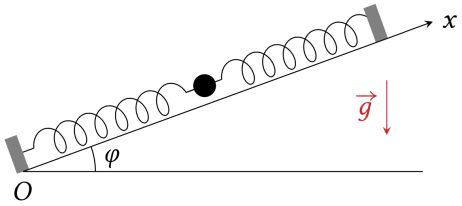


FIGURE 3

La masse m est lâchée depuis le milieu du dispositif sans vitesse initiale. À l'aide du théorème de la puissance mécanique, déterminer $x(t)$.

Réponse

La masse m est soumise à trois forces conservatives qui sont son poids et la force de chacun des deux ressorts.
Exprimons chacune des énergies potentielle associées en fonction de x. Commençons par l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{\text{pp}} = mgx\sin\varphi \tag{30}$$

en prenant la constante nulle en O. Énergie potentielle élastique du ressort de gauche :

$$E_{\text{p1}} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 \tag{31}$$

Et pour le second

$$E_{\text{p2}} = \frac{1}{2}k(2l_0-x-l_0)^2 = \frac{1}{2}k(l_0-x)^2 = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 \tag{32}$$

l'énergie potentielle totale est donc

$$E_p = mgx\sin\varphi + 2\times\frac{1}{2}k(x-l_0)^2 = mgx\sin\varphi + k(x-l_0)^2 \tag{33}$$

Le système ne subit aucune force non conservative ainsi

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c+E_p) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\sin\varphi + k(x-l_0)^2\right) = 0 \tag{34}$$

ainsi

$$m\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x}\sin\varphi + 2k\dot{x}(x-l_0) = 0 \tag{35}$$

$$\ddot{x} + 2\frac{k}{m}x = 2\frac{k}{m}l_0 - g\sin\varphi \tag{36}$$

On pose $\omega_0^2 = k/m$ et on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 - g\sin\varphi \tag{37}$$

La solution générale est somme des solutions harmonique x_H et particulière x_p

$$x_p = l_0 - \frac{mg\sin\varphi}{k} \quad ; \quad x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{38}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0 - \frac{mg\sin\varphi}{k} \tag{39}$$

On utilise les conditions initiales

$$x(t=0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(t=0) = 0 \tag{40}$$

$$A + l_0 - \frac{mg\sin\varphi}{k} = 0 \implies A = \frac{mg\sin\varphi}{k} - l_0 \tag{41}$$

$$\omega_0 B = 0 \implies B = 0 \tag{42}$$

Ainsi

$$x(t) = \left(l_0 - \frac{mg\sin\varphi}{k}\right)(1-\cos(\omega_0 t)) = x_{\text{éq}}(1-\cos(\omega_0 t)) \tag{43}$$