BL1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 6

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définir la notion de borne supérieure et de majorant.

Exercice

Soient $x \in [-1, 2]$ et $y \in]1, 4]$, donner un encadrement $\dfrac{x+2y}{(x+2)y}$ et $\dfrac{2x+y}{y^2}$.

Exercice

1. Expliciter les suites définies par :
   (a) $x_0 = 11$, $x_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2x_{n+2} = 3x_{n+1} + 2x_n$.
   (b) $u_0 = 11$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 9$.
   (c) $u_0 = e^3$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
2. Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = \frac{2w_n + 3}{w_n + 4}.$$

   (a) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
   (b) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (c) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n : $z_n = \dfrac{w_n - 1}{w_n + 3}$.
   Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (d) Expliciter le terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, évaluer sa limite.

BL1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 6

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Citer l'inégalité triangulaire.

Exercice

1. Montrer que, pour tout x et y de $]0,+\infty[$, on a : $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant \dfrac{x+y}{4}$.
2. En déduire que, pour tout a, b et c strictement positifs, on a :

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Exercice

1. Expliciter les suites définies par :
   (a) $u_0 = 11$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   (b) $y_0 = 11$, $y_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n non nul, $4y_n = y_{n+1} - 12y_{n-1}$,
   (c) $w_0 = 11$, $w_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$.
2. Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

On pose $x_0 = \left|\dfrac{\sqrt{a}}{2} - 1\right|$ et $x_1 = \left|\dfrac{\sqrt{b}}{2} - 1\right|$. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

BL1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 6

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Expliquer le concept de suite extraite, donner un exemple.

Exercice

Soient x et y deux réels. On pose $u = x - 1$ et $v = y - 1$.

1. Montrer que : $uv + u + v = xy - 1$.
2. Développer l'expression $(1 + |u|)(1 + |v|)$.
3. Démontrer alors que : $1 + |xy - 1| \leqslant (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice

1. Expliciter la suite définie par : $v_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 2$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 2}.$$

   (a) Montrer que l'équation $x = \dfrac{-1}{x+2}$ d'inconnue x réel possède exactement une solution, que l'on notera c.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
   (c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n, $v_n(u_n - c) = 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (d) Expliciter le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?