MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication: Inconnue auxiliaire : c'est quoi ?
Démonstration: Inverse d'une matrice d'ordre 2.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} & -y+2z+3t &= 0 \\ 2x & +2y-z &= 0 \\ 3x & -y+2z-2t &= 0 \\ 5x & +y+z-2t &= 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} X-Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$ d'inconnue $(X,Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2$.

Exercice 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k \right) = I_n - A^p.$$
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible si A est nilpotente et calculer son inverse.
3. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
4. Utiliser une autre méthode pour montrer que B est inversible et pour calculer B^{-1}.
5. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. **Question indépendante.** On pose : $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^3 et en déduire que C est inversible. Donner son inverse.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication: Expression des solutions d'un système de taille deux à l'aide de déterminants.
Démonstration: Algorithme du miroir.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-z+t & =1 \\ 2x+13y-7z+2t & =2 \\ x-y+z+t & =0 \\ x+7y-4z+t & =-1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} ax+by+z & =1 \\ x+aby+z & =b \\ x+by+az & =1 \end{cases}$$

Exercice 2

On suppose que M est une matrice carrée antisymétrique de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficient dans $\mathbb{R}$. On admet que $I_n + M$ est alors une matrice inversible. On pose :

$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que $I_n - M$ est inversible puis que C est inversible.
2. Montrer que $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$.
3. Montrer que, si U et V sont des matrices carrées de même taille telles que V est inversible et $U \times V = V \times U$, alors : $U \times V^{-1} = V^{-1} \times U$.
4. En déduire que $C^T = C^{-1}$.
5. **Question indépendante.** On pose : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication: Formule du binôme de Newton pour les matrices : formule ? Hypothèse ?
Démonstration: Inverse d'un produit, d'une inverse, d'une transposée.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} 5x+15y-35z+10t &= 5 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ 7x-7y-14z+7t &= -7 \\ 10x+70y-40z+10t &= 30 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 4\cos(\theta)\cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4\sin(\theta)\sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases}$ d'inconnue $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $L \times C$ et $C \times L$.
2. On note $A = C \times L$. Exprimer A^2 en fonction de A.
3. En déduire une expression de A^n pour tout entier $n \geqslant 1$. Dans la suite, on pose $B = I_3 + A$ où I_3 est la matrice unité de taille 3.
4. Calculer B^n pour tout entier naturel n.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $B \times (I_3 + \lambda A) = I_3$ et le déterminer.
   (b) Que cela signifie-t-il sur B?
6. **Question indépendante.** On pose : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $E^3 - 4E^2 + E + 6I_3$ et en déduire que E est inversible. Donner son inverse.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication : Matrice inversible et opérations : inverse d'inverse, de produit, de transposée, de somme ?
Démonstration : Inverse d'une matrice d'ordre 2.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} & -y+2z+3t &= 0 \\ 2x & +2y-z &= 0 \\ 3x & -y+2z-2t &= 0 \\ 5x & +y+z-2t &= 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} X-Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$ d'inconnue $(X,Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2$.

Exercice 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k \right) = I_n - A^p$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible si A est nilpotente et calculer son inverse.
3. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
4. Utiliser une autre méthode pour montrer que B est inversible et pour calculer B^{-1}.
5. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. **Question indépendante.** On pose : $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^3 et en déduire que C est inversible. Donner son inverse.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication : Inverse et matrice triangulaire : Que peut-on dire ?
Démonstration : Algorithme du miroir.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-z+t & =1 \\ 2x+13y-7z+2t & =2 \\ x-y+z+t & =0 \\ x+7y-4z+t & =-1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} ax+by+z & =1 \\ x+aby+z & =b \\ x+by+az & =1 \end{cases}$$

Exercice 2

On suppose que M est une matrice carrée antisymétrique de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficient dans $\mathbb{R}$. On admet que $I_n + M$ est alors une matrice inversible. On pose :

$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que $I_n - M$ est inversible puis que C est inversible.
2. Montrer que $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$.
3. Montrer que, si U et V sont des matrices carrées de même taille telles que V est inversible et $U \times V = V \times U$, alors : $U \times V^{-1} = V^{-1} \times U$.
4. En déduire que $C^T = C^{-1}$.
5. **Question indépendante.** On pose : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir matrices triangulaires, scalaires, élémentaires, antisymétriques et nilpotentes.
Démonstration : Inverse d'un produit, d'une inverse, d'une transposée.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} 5x+15y-35z+10t &= 5 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ 7x-7y-14z+7t &= -7 \\ 10x+70y-40z+10t &= 30 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 4\cos(\theta)\cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4\sin(\theta)\sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases}$ d'inconnue $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $L \times C$ et $C \times L$.
2. On note $A = C \times L$. Exprimer A^2 en fonction de A.
3. En déduire une expression de A^n pour tout entier $n \geqslant 1$. Dans la suite, on pose $B = I_3 + A$ où I_3 est la matrice unité de taille 3.
4. Calculer B^n pour tout entier naturel n.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $B \times (I_3 + \lambda A) = I_3$ et le déterminer.
   (b) Que cela signifie-t-il sur B?
6. **Question indépendante.** On pose : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $E^3 - 4E^2 + E + 6I_3$ et en déduire que E est inversible. Donner son inverse.