Exercice 1 : Calcul algébrique

Soit α et β deux constantes réelles non nulles, p une variable et $E(p)$ et $S(p)$ deux fonctions de p. On a l'équation :

$$S(p) = \alpha\left[\frac{1}{1+\beta.p}\big(E(p) - S(p)\big)\right]$$

Q1. *Ecrire la fonction* $H(p) = S(p)/E(p)$ *sous la forme :* $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+T.p}$ *où K et T sont des constantes à exprimer en fonction de* α *et* β.

Soit α, β, γ et δ quatre constantes réelles non nulles, p une variable et $E(p)$, $P(p)$ et $S(p)$ trois fonctions de p. On a l'équation :

$$S(p) = \frac{1}{\alpha.p}\left[P(p) + \frac{\beta}{1+\gamma.p} \times \frac{1}{p}\big(E(p) - \delta.S(p)\big)\right]$$

Q2. *Ecrire la fonction S(p) sous la forme :*

$$S(p) = \frac{K_1}{1+a.p+b.p^2+c.p^3}E(p) + \frac{K_2.p^n(1+T.p)}{1+a.p+b.p^2+c.p^3}P(p)$$

où K_1, K_2, *a, b, c, T et n sont des constantes à exprimer en fonction de* α, β, γ et δ.

Soit α, β *et* γ trois constantes réelles strictement positives et p une variable.

Soit le polynôme $D(p) = \alpha.p^2 + \beta.p + \gamma$

Q3. *Ecrire ce polynôme sous la forme (appelée forme canonique) :* $D(p) = K\left(1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0{}^2}p^2\right)$ *où* K, ξ *et* ω_0 *sont des constantes à exprimer en fonction de* α, β, γ.

Exercice 2 : Calcul numérique

Q1. *Déterminer les racines du polynôme en p suivant :* $D(p) = 2p^2 + 5p + 2$

Q2. *Exprimer ce polynôme sous la forme suivante :* $D(p) = K(p+a)(p+b)$ *où K, a et b sont à déterminer.*

Q3. *Exprimer ce polynôme sous sa forme canonique suivante :* $D(p) = K'.(\tau_1.p+1)(\tau_2.p+1)$ *où K',* τ_1 *et* τ_2 *sont à déterminer.*

Exercice 3 : Calcul de limites

Soit α, β, γ et δ quatre constantes réelles strictement positives et p une variable.

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{p\to 0^+} \frac{\alpha(1+\beta p)}{\frac{\gamma}{p(1+\delta p)} + \frac{p}{1+\delta p}} \qquad \lim_{p\to +\infty} \frac{\alpha(1+\beta p)}{\frac{\gamma}{p(1+\delta p)} + \frac{p}{1+\delta p}} \qquad \lim_{p\to +\infty} \frac{\alpha(1+\beta p)}{\frac{\gamma}{p(1+\delta p)} + \frac{p^2}{1+\delta p}}$$

Exercice 4 : Calcul de dérivés

Soit *α, p* et *ω* trois constantes réelles strictement positives, *N* un entier naturel non nul, *t* une variable et *f(t)* une fonction de *t*.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(t) = \alpha\cos(\omega t) \qquad f(t) = \alpha\sin(\omega t) \qquad f(t) = \alpha t^N \qquad f(t) = \alpha e^{-pt}$$

$$f(t) = \alpha e^{-pt}\cos(\omega t) \quad f(t) = \alpha e^{-pt}\sin(\omega t) \qquad f(t) = \alpha e^{-pt} t^N$$

Exercice 5 : Calcul de primitives

Soit *α, p* et *ω* trois constantes non nulles, *N* un entier naturel non nul, *t* une variable et *f(t)* une fonction de *t*.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(t) = \alpha\cos(\omega t) \quad f(t) = \alpha\sin(\omega t) \quad f(t) = \alpha t^N \qquad f(t) = \alpha e^{-pt}$$

Exercice 6 : Calcul d'intégrales

Soit α et p, deux constantes strictement positives.

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \alpha e^{-pt} dt = \lim_{X\to+\infty} \int_{t=0}^{t=X} \alpha e^{-pt} dt$$

Exercice 7 : Calcul avec des complexes

Soit j le nombre complexe imaginaire pur tel que : $j^2 = -1$

Q1. *Placer dans le plan complexe :* $1+2j$ $\quad 2-j$ $\quad -1+3j$

Donner le module et l'argument de ces trois nombres complexes.

Soit *α et β* deux constantes réelles strictement positives et *ω* une variable (supposée positive). On note :

$$H_1(j\omega) = \frac{\alpha}{1 + j\beta\omega} \qquad H_2(j\omega) = \frac{\alpha}{-1 + j\beta\omega}$$

Q2. *Déterminer les expressions du module et de l'argument de* H_1 *et* H_2 *en fonction de ω.*

Q3. *Déterminer, en fonction de ω, les expressions du module et de l'argument de* $H_3 = H_1.H_2$ *et de* $H_4 = H_1/H_2$.