

DS N° 1 : Sujet

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Durée : 2 heures

Le devoir comporte un unique problème

1 Mise en situation

1.1 Contexte

Dans le contexte industriel actuel, il existe encore un grand nombre de tâches pénibles qui ne peuvent pas être automatisées et où le geste humain reste indispensable. L'introduction d'une assistance robotique peut alors être envisagée pour réduire les efforts que l'opérateur doit fournir et ainsi éviter l'occurrence de troubles musculo-squelettiques.

1.2 Présentation du système

Le bras collaboratif de l'entreprise SAPELEM, nommé ZE Solution et présenté figure 1, permet de manipuler intuitivement différents types de charges allant jusqu'à 200 kg « sans effort ». Afin de respecter la confidentialité de ce système, les données et résultats présentés dans ce sujet sont approchés et limitatifs par rapport à la solution industrielle réelle.

1.3 Architecture matérielle de la solution conçue par SAPELEM

Le diagramme de définition de blocs du bras manipulateur collaboratif qui constitue l'objet de cette étude est fourni sur la figure 2.



FIGURE 1 – Photos du bras manipulateur collaboratif SAPELEM et d'un environnement de manutention

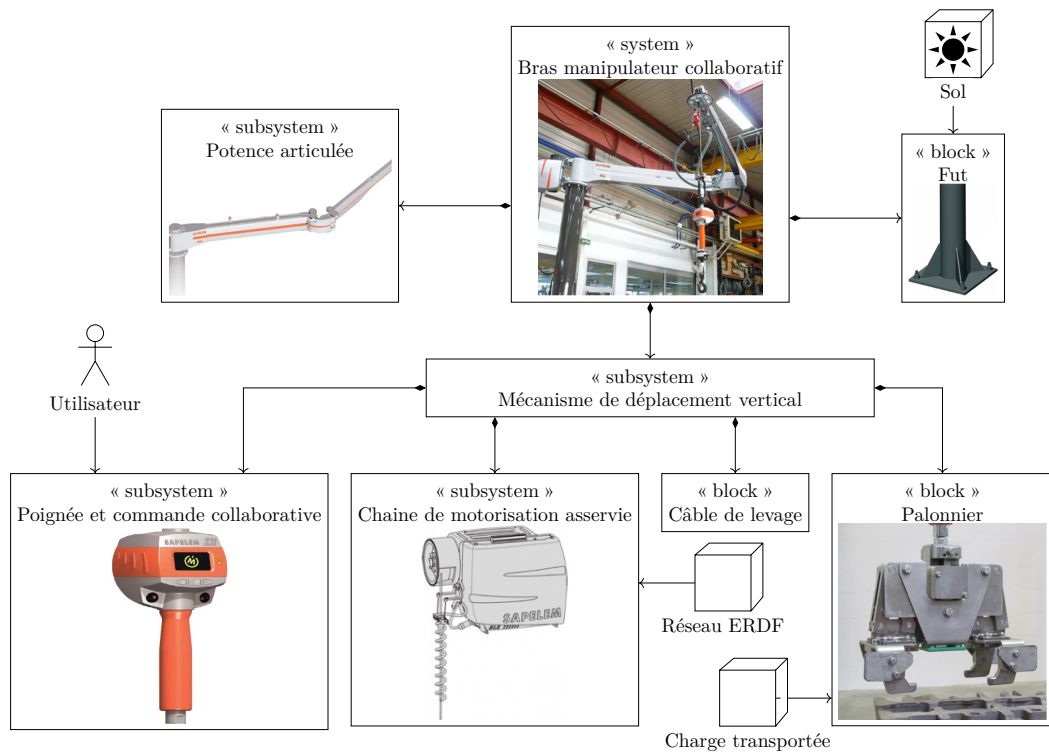


FIGURE 2 – Diagramme de définition de blocs du bras manipulateur collaboratif SAPELEM

2 Mise en évidence de l'objectif de l'étude

Objectif

S'approprier la problématique du sujet en effectuant une vérification partielle des exigences d'un bras manipulateur collaboratif conçu par la société SAPELEM.

Dans toute l'étude, seul le mouvement vertical de la charge sera étudié.

2.1 Exigences du commanditaire

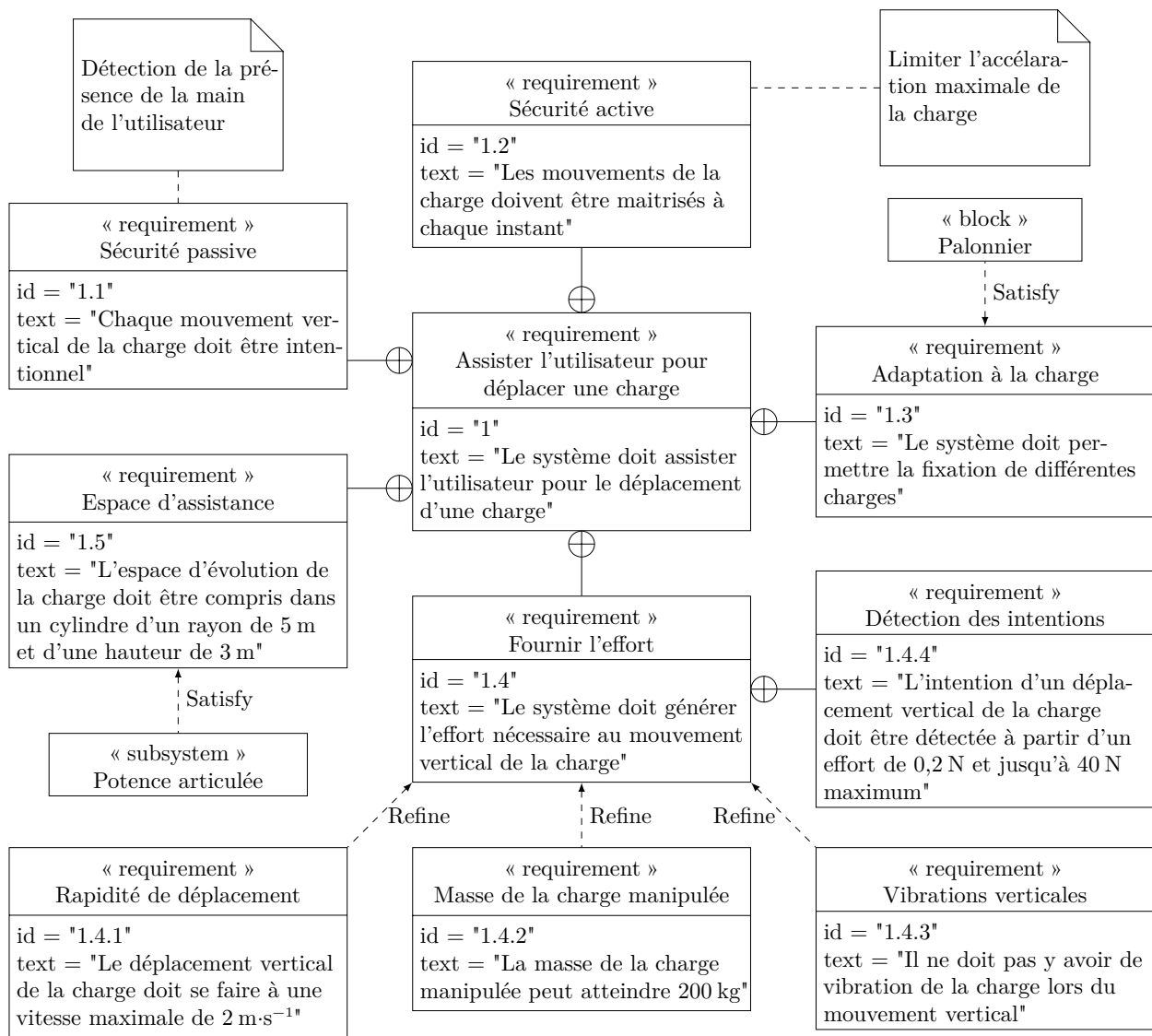


FIGURE 3 – Diagramme des exigences du bras manipulateur collaboratif SAPELEM

2.2 Vérification partielle des exigences

2.2.1 Sécurité active

Afin de satisfaire l'exigence id 1.2, il est nécessaire de s'assurer que le câble de levage est toujours tendu. On désigne l'ensemble {palonnier + charge transportée} sous le terme générique « charge ».

Cette charge a pour masse M . Lors d'un déplacement vertical, le câble exerce, sur cette charge, une action mécanique de résultante $T\vec{z}$ où \vec{z} est un vecteur unitaire dirigé vers le haut. On note $a\vec{z}$ le vecteur accélération verticale de la charge par rapport au référentiel galiléen. L'action de la main de l'utilisateur sur la poignée est négligée par rapport aux autres actions durant cette phase.

Q1. En isolant la charge, montrer que $T = M \cdot (a + g)$. Pour quelle valeur de l'accélération a la résultante T s'annule-t-elle ? Conclure sur le critère à respecter pour valider l'exigence id 1.2.

2.2.2 Comportement attendu

L'intention de l'utilisateur est détectée par la mesure de la résultante d'action mécanique $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{z}$ qu'il exerce sur la poignée (figure 4), par l'intermédiaire d'un capteur d'effort. La commande collaborative traite cette information et élabore la consigne de mouvement de la charge destinée à la chaîne de motorisation asservie. Cette dernière met en mouvement la charge.

Le comportement attendu du bras manipulateur collaboratif est le suivant :

- si l'utilisateur exerce un effort $|F_{op}| \geq 0,2$ N, la charge doit se déplacer verticalement ;
- si l'utilisateur relâche la poignée ($F_{op} = 0$), la charge doit s'arrêter dans la position où elle se trouve.

Le schéma de la figure 5 décrit le principe de la boucle collaborative. On considère dans un premier temps que l'ensemble poignée et commande collaborative est modélisé par un gain proportionnel. Dans ce cas, la consigne de mouvement de la charge envoyée à la chaîne de motorisation asservie est proportionnelle à l'effort exercé par l'utilisateur sur la poignée. Plusieurs consignes de mouvement de la charge peuvent être envisagées :

- consigne d'accélération ;
- consigne de vitesse.



FIGURE 4 – Bras manipulateur en situation

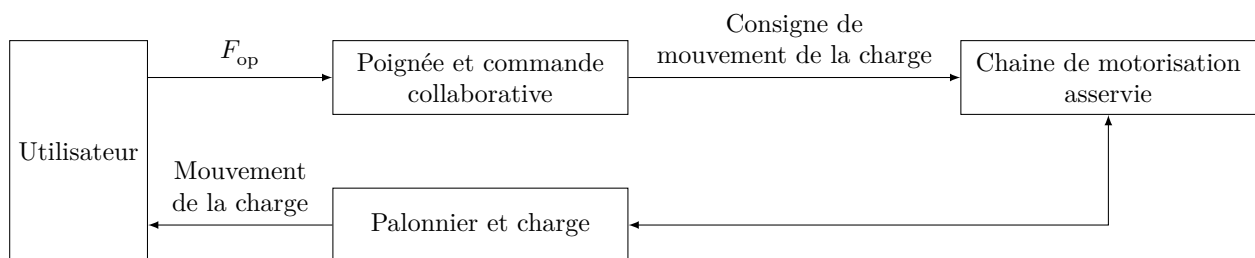


FIGURE 5 – Architecture de la boucle collaborative

Q2. On se propose de justifier que seule une consigne de vitesse permet de satisfaire au comportement attendu.

- a) Considérons un système en translation possédant, à l'instant initial $t = 0$, une vitesse linéaire V_0 et une position z_0 . Donner l'expression de la position $z(t)$ de ce système lorsqu'il est soumis à une accélération a constante.
- b) On rappelle que l'ensemble poignée et commande collaborative est modélisé par un gain pur.

Notons K_{pcc} ce gain et $cons(t)$ la consigne de mouvement de la charge. Quelle relation existe-t-il alors entre $F_{op}(t)$, K_{pcc} et $cons(t)$?

- c) Rappeler ce que vaut F_{op} dans le cas où l'utilisateur lâche la poignée. Justifier alors que seule une des deux consignes envisagées (vitesse ou accélération) engendre le comportement attendu.

2.2.3 Vibrations et vitesse maximale

On procède à un essai sur le bras manipulateur collaboratif. Une charge étant suspendue au plafonnier, l'utilisateur exerce sur la poignée un échelon d'effort $F_{op} = -20 \text{ N}$ (donc dirigé vers le bas). La figure 6 présente la consigne de vitesse ainsi que l'évolution temporelle de la vitesse de la charge par rapport à la potence articulée en réponse à cette consigne.

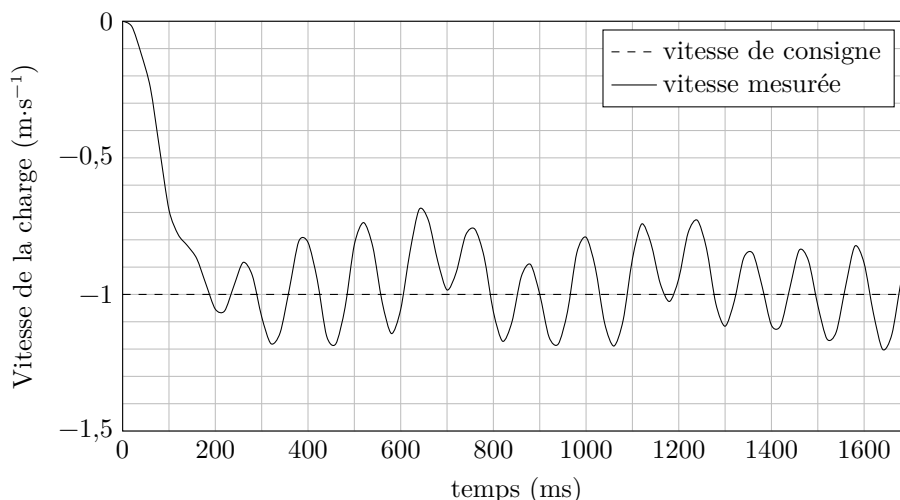


FIGURE 6 – Courbe de vitesse de la charge par rapport à la potence articulée

Q3. À partir de la figure 6, justifier que l'exigence id 1.4.3 n'est pas satisfaite.

Le constructeur fournit les informations de la figure 7 dans sa documentation commerciale du système. On constate alors que l'exigence id 1.4.3 est satisfaite par l'introduction du filtre « DSC » (*Dynamic Stability Control*).

2.2.4 Objectif de l'étude

L'objectif de l'étude qui suit est de proposer une solution permettant de limiter les vibrations. Pour atteindre cet objectif, l'étude est organisée en deux phases :

- identifier l'origine des vibrations ;
- valider les performances de la boucle collaborative avec un filtre DSC.

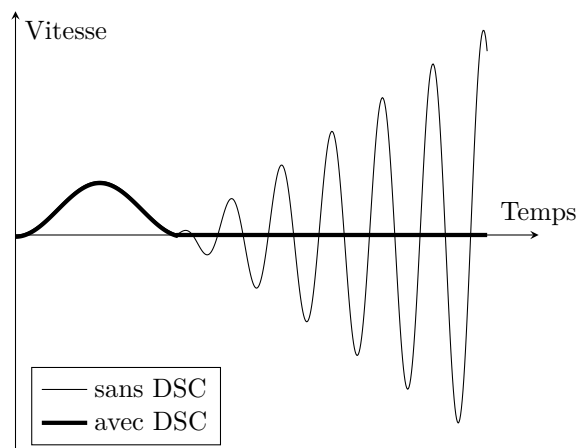


FIGURE 7 – Extrait de la documentation commerciale

3 Étude de l'asservissement de vitesse de la chaîne de motorisation asservie

Objectif

Vérifier que l'asservissement en vitesse du sous-système chaîne de motorisation asservie n'est pas à l'origine des vibrations.

Dans cette partie, on suppose que la potence articulée est indéformable, que le câble de levage est inextensible et que l'exigence id 1.2 est vérifiée.

3.1 Performances attendues

Stabilité	Absolue	-
Précision	Erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon	Nulle
Rapidité	Temps de réponse à 5%	≤ 500 ms

TABLE 1 – Extrait du cahier des charges

3.2 Analyse structurelle du mécanisme de déplacement vertical

Objectif

Analyser l'architecture matérielle du mécanisme de déplacement vertical.

Les diagrammes de définition de blocs et de blocs internes, permettant de décrire la structure du mécanisme de déplacement vertical de la charge, sont fournis sur les figures 8 et 9.

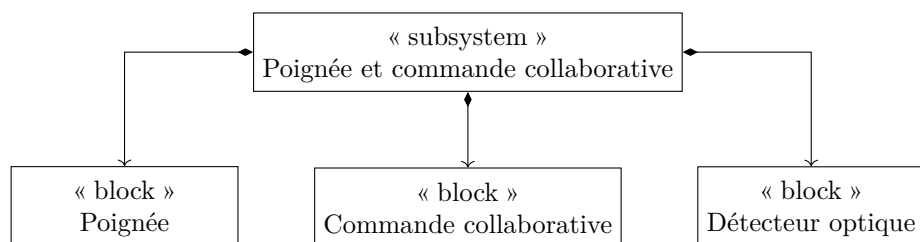


FIGURE 8 – Diagramme de définition de blocs du sous-système « poignée et commande collaborative »

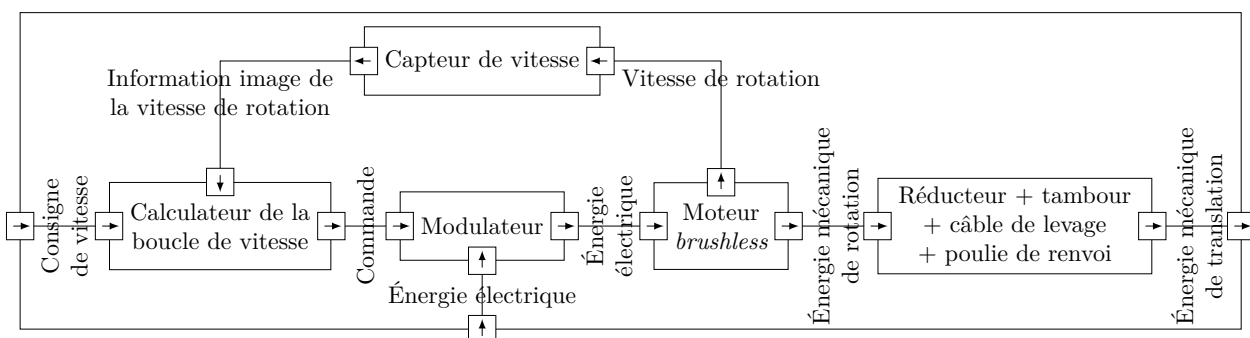


FIGURE 9 – Diagramme de blocs internes de la chaîne de motorisation asservie

Q4. À l'aide des figures 5, 8 et 9, compléter sur le document réponses les zones manquantes des chaînes fonctionnelles du bras manipulateur collaboratif. Entourer sur ce schéma, en rouge, les éléments de la chaîne d'énergie et, en bleu, ceux de la chaîne d'information.

3.3 Modélisation de l'asservissement

Le schéma-blocs fonctionnel de la chaîne de motorisation asservie est présenté sur la figure 12.

Q5. Pourquoi peut-on parler de système asservi ?

3.3.1 Modélisation des constituants

Le comportement du moteur est modélisé par les équations suivantes :

$$C_m(t) = K_m i(t) \quad \text{et} \quad A \frac{d\omega_m}{dt}(t) = C_m(t) - C_r(t)$$

avec $A = 5,13 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur, $C_r(t) = B \cdot u(t)$ le couple résistant, avec $B = 6,18 \text{ N}\cdot\text{m}$ et $u(t)$ l'échelon unitaire, et $C_m(t)$ est le couple imposé par le stator du moteur *brushless* sur son rotor.

Q6. À l'aide de la documentation du moteur fournie figure 11, donner la valeur de K_m .

Le réducteur possède un rapport de transmission $K_r = 1/15,88$ tel que $\omega_T(t) = K_r \omega_m(t)$.

On suppose que le câble s'enroule et se déroule sans glisser sur le tambour et la poulie de renvoi. Ils possèdent le même rayon noté $R = 0,05 \text{ m}$ (cf. figure 10).

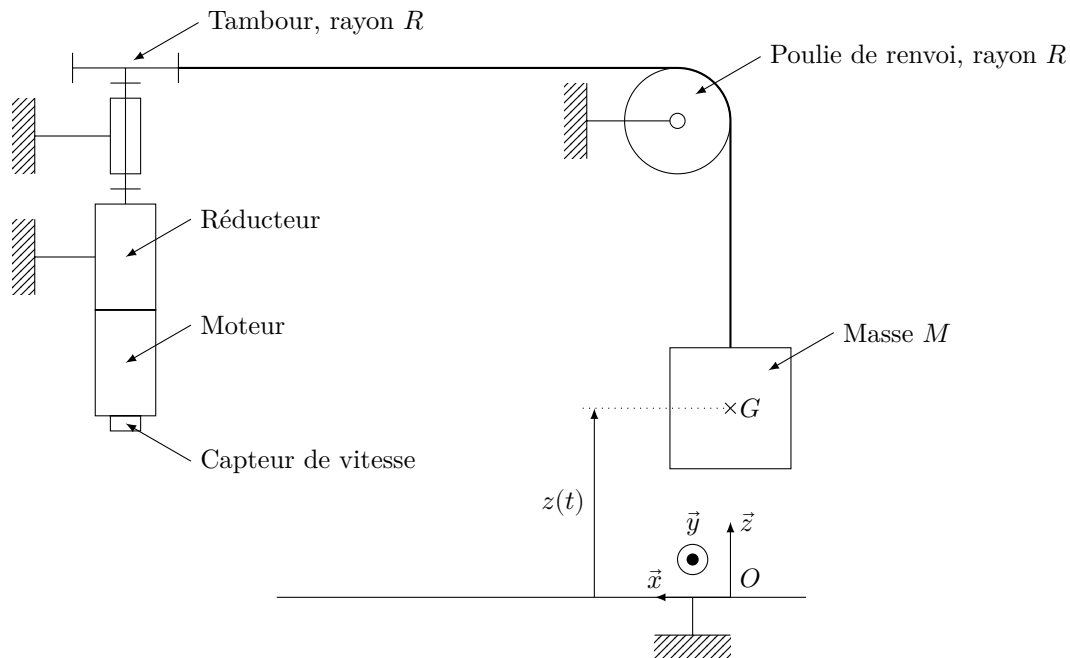


FIGURE 10 – Schéma de principe du mécanisme de déplacement vertical

Q7. Quelle distance z la charge parcourt-elle pour un tour de tambour ? Pour un demi-tour ? En déduire une relation entre $z(t)$ et l'angle $\theta_T(t)$ pris par le tambour, puis entre $v(t) = \frac{dz}{dt}(t)$ et $\omega_T(t) = \frac{d\theta_T}{dt}(t)$.

Q8. En déduire l'expression de K_{rigide} tel que : $v(t) = K_{\text{rigide}}\omega_m(t)$. Faire l'application numérique.


L'adaptateur est modélisé par un gain pur K_a ; le capteur par le gain pur $K_c = 0,4 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$.

Q9. Écrire une relation entre $v_c(t)$, K_a et $u_c(t)$. Écrire de même la relation liant $u_{\text{mes}}(t)$, K_c et $\omega_m(t)$.

On souhaite obtenir un écart nul en sortie de comparateur lorsqu'enfin la vitesse réelle atteint la vitesse de consigne.

Q10. Exprimer l'écart $\varepsilon(t)$ en fonction de $v_c(t)$ et $\omega_m(t)$, puis en fonction de $v_c(t)$ et $v(t)$. En déduire une expression de K_a en fonction de K_c et K_{rigide} . Faire l'application numérique.

Caractéristiques	Valeur
Vitesse maximale du moteur en charge	6 200 tr·min ⁻¹
Couple moteur nominal	3,15 N·m
Couple moteur maximal	10,8 N·m
Courant nominal	3,5 A
Courant maximal	12 A



Moteur *brushless* 400V/0016

FIGURE 11 – Caractéristique du moteur *brushless*

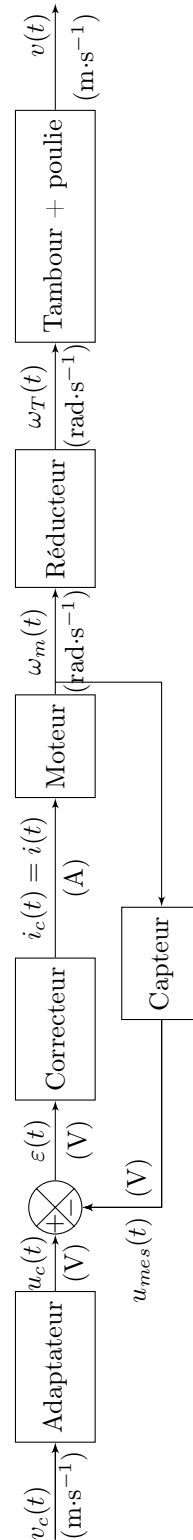


FIGURE 12 – Schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement étudié

3.3.2 Modélisation du système non corrigé

On considère dans un premier temps le système non corrigé : le correcteur est modélisé par un gain pur unitaire et donc $i(t) = i_c(t) = C\varepsilon(t)$ avec $C = 1$.

Q11. On cherche à déterminer le modèle de l'asservissement non corrigé.

- Combiner les différentes équations établies précédemment pour obtenir une équation différentielle du premier ordre liant $v(t)$, $v_c(t)$ et $C_r(t) = B \cdot u(t)$ avec $u(t)$ l'échelon unitaire.
- La mettre sous la forme canonique suivante :

$$\tau \frac{dv}{dt}(t) + v(t) = K_1 v_c(t) - K_2 B \cdot u(t) \quad (*)$$

- Identifier les expressions des paramètres K_1 , K_2 et τ en fonction de K_{rigide} , A , K_m et K_a . Faire les applications numériques.

3.4 Simulation du système non corrigé

On se place dans le cas du cahier des charges : on considère une entrée échelon, d'amplitude v_0 : $v_c(t) = v_0 u(t)$, avec $u(t)$ l'échelon unitaire.

Q12. a) Donner l'expression de l'équation (*) dans le domaine de Laplace en considérant les conditions initiales nulles. Notation : $V(p) = \mathcal{L}(v(t))$ où \mathcal{L} est la transformée de Laplace.

b) Donner l'expression temporelle de $v(t)$, solution de l'équation (*). Utiliser les documents en annexe (tableau des transformées de Laplace et décomposition en éléments simples) pour y parvenir.

Q13. Calculer la limite : $v_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution temporelle de v . Conclure sur la stabilité du système ainsi modélisé.

Q14. Retrouver le résultat suivant : $t_{5\%} \simeq 3\tau$ où $t_{5\%}$ est le temps de réponse à 5% du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Q15. Évaluer son erreur statique $\mu_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_c(t) - v(t))$. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Conclusion - Le système non corrigé ne répond pas aux attentes du cahier des charges. Une correction est nécessaire.

3.5 Choix du correcteur de la chaîne de motorisation asservie

Objectif

Déterminer les paramètres du correcteur de la boucle de vitesse.

On retient un correcteur dit « proportionnel-intégral », dont la comportement est modélisé par l'équation suivante :

$$\frac{di}{dt}(t) = \frac{K_i}{T_i} \varepsilon(t) + K_i \frac{d\varepsilon}{dt}(t)$$

avec $K_i = 0,18 \text{ A}\cdot\text{V}^{-1}$ et $T_i = 0,14 \text{ s}$.

Q16. a) Donner l'expression de la fonction de transfert du correcteur $\frac{I(p)}{\varepsilon(p)}$.

b) En reprenant les équations de la partie 3.3.1. et en considérant $C_r(t)$ nul, donner l'expression de la fonction de transfert $\frac{V(p)}{V_c(p)}$.

c) Exprimer cette fonction de transfert sous la forme canonique suivante :
$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{1 + \frac{2m}{\omega_0}p}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

Identifier ω_0 et m . Donner leurs expressions en fonction des constantes définies et faire l'application numérique du coefficient d'amortissement m .

Les réponses temporelles simulée et réelle de la chaîne de motorisation asservie (avec une charge à déplacer de masse $M = 100$ kg) à un échelon de vitesse de consigne de $5\,000$ tr·min⁻¹ avec les réglages déterminés précédemment sont fournies sur la figure 22 du document réponses.

Q17. Comparer les résultats simulés et les résultats expérimentaux sur les critères du temps de réponse à 5% et de la valeur finale en complétant le tableau du document réponses. Conclure quant à la validité du modèle.

Conclusion - La chaîne de motorisation asservie correctement réglée n'est pas à l'origine des vibrations observées sur la figure 6.

Remarque - Les performances de la chaîne de motorisation asservie sont dépendantes de la masse M , mais sont supposées toujours vérifiées quelle que soit la masse de la charge à déplacer. Le modèle élaboré dans cette partie est retenu pour l'ensemble du sujet.

4 Poursuite de la recherche de l'origine des vibrations

Objectif

Identifier l'origine des vibrations et déterminer un modèle de comportement de la potence articulée.

Dans un premier temps, on émet l'hypothèse que le capteur d'effort intégré à la poignée de commande est à l'origine du comportement vibratoire.

4.1 Étude expérimentale

La figure 13 est issue d'un essai. On soumet la chaîne de motorisation asservie à une consigne de vitesse de $3\,000$ tr·min⁻¹, en l'absence d'action de l'utilisateur sur la poignée ($F_{op} = 0$), et on mesure le signal en sortie du capteur d'effort (tension notée S_j en mV) placé dans la poignée. Le capteur d'effort se comporte alors comme un accéléromètre.

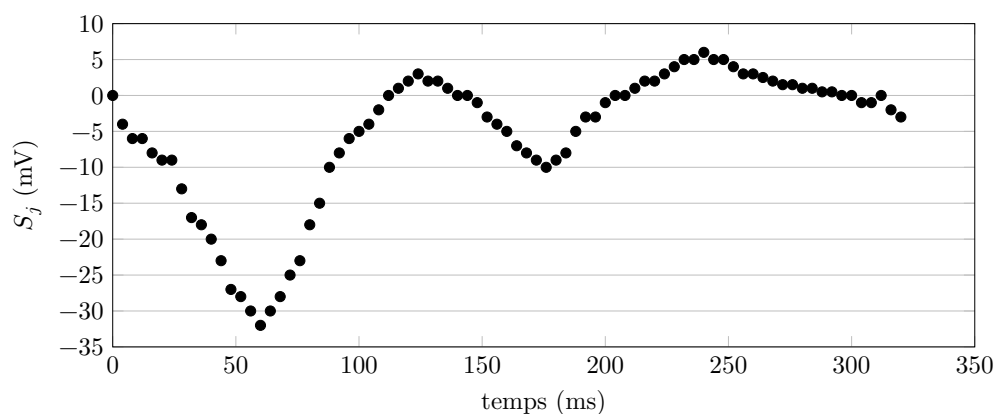


FIGURE 13 – Mesure du signal S_j en sortie du capteur d'effort

Q18. Déterminer la pseudo-période T du signal issu du capteur, en ms. En déduire la pseudo-pulsation associée, $\omega_i = \frac{2\pi}{T}$, en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.2 Modélisation du capteur d'effort

Le capteur d'effort est modélisé par un système masse + ressort + amortisseur tel que représenté sur la figure 14.

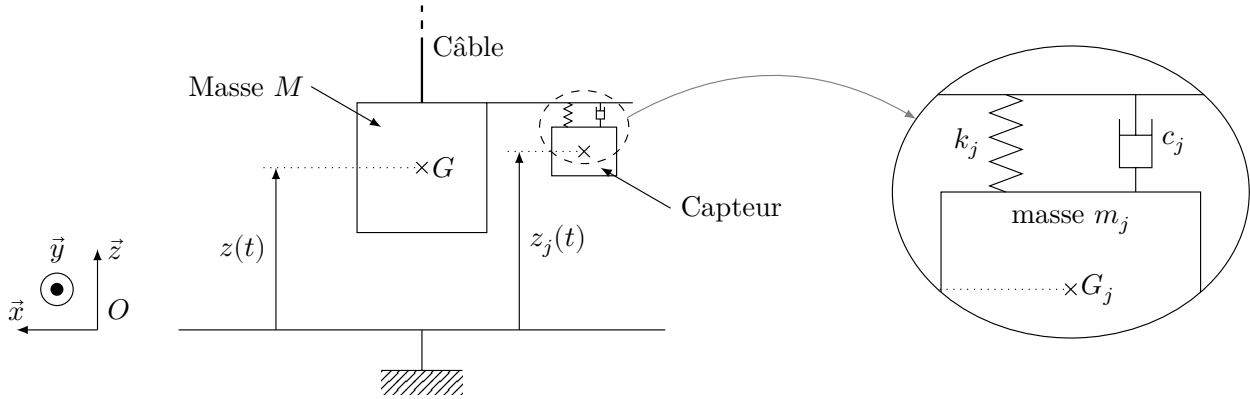


FIGURE 14 – Schéma de principe du capteur d'effort associé à la poignée

Tableau des grandeurs caractéristiques du capteur d'effort

Grandeur	Notation	Valeur
Masse du corps d'épreuve	m_j de centre de gravité G_j	$m_j = 100 \text{ g}$
Coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur	c_j	$c_j = 60 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$
Raideur du ressort	k_j	$k_j = 1 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$
Effort mesuré par le capteur	$F_j(t)$	
Gain du conditionneur	K_{capt}	$K_{\text{capt}} = 100 \text{ mV}\cdot\text{N}^{-1}$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au corps d'épreuve de masse m_j selon l'axe vertical \vec{z} permet d'obtenir l'équation :

$$m_j \frac{d^2 z_j(t)}{dt^2} = -k_j(z_j(t) - z(t)) - c_j \frac{d(z_j(t) - z(t))}{dt}$$

L'effort mesuré par le capteur est donné par $F_j(t) = k_j(z_j(t) - z(t))$ et le signal qu'il délivre est $S_j(t) = K_{\text{capt}} F_j(t)$. On rappelle qu'avec l'hypothèse d'une potence articulée indéformable, on a $v(t) = \frac{dz}{dt}(t) = K_{\text{rigide}} \omega_m(t)$.

Q19. On se place dans les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles).

a) Transformer les quatre équations précédentes dans le domaine de Laplace.

b) Déterminer la fonction de transfert $\frac{S_j(p)}{\Omega_m(p)}$ sous forme littérale et la mettre sous la forme

$$\frac{K_j p}{1 + \frac{2\xi_j}{\omega_j} p + \frac{1}{\omega_j^2} p^2}$$

c) Donner la forme littérale et la valeur numérique de la pulsation propre non amortie ω_j du système.

- d) Comparer avec la pulsation propre ω_i du capteur d'effort déterminée question 18.
 e) Les vibrations observées sont-elles dues au capteur ?

On complète le modèle validé dans la partie II avec l'hypothèse d'une potence articulée indéformable, avec celui du capteur d'effort déterminé précédemment. On simule ce modèle avec une consigne de vitesse en échelon de $3\,000\text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le résultat de simulation est fourni sur la figure 15.

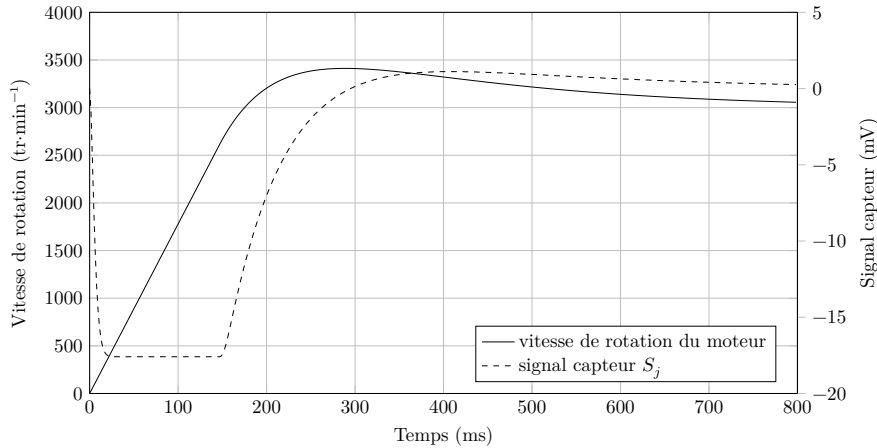


FIGURE 15 – Résultat de simulation du modèle constitué des modèles de la chaîne de motorisation asservie et du capteur d'effort

Conclusion - La comparaison des courbes simulées et réelles met hors de cause le capteur d'effort vis-à-vis de l'origine des vibrations. On remet en cause l'hypothèse d'une potence articulée indéformable.

4.3 Modélisation de la potence articulée et validation de l'origine des vibrations

La souplesse de la potence articulée est modélisée par un système masse + ressort + amortisseur au niveau de la poulie de renvoi, dont les paramètres (raideur du ressort k et coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur c) sont à identifier. Le schéma cinématique de ce nouveau modèle est donné figure 16.

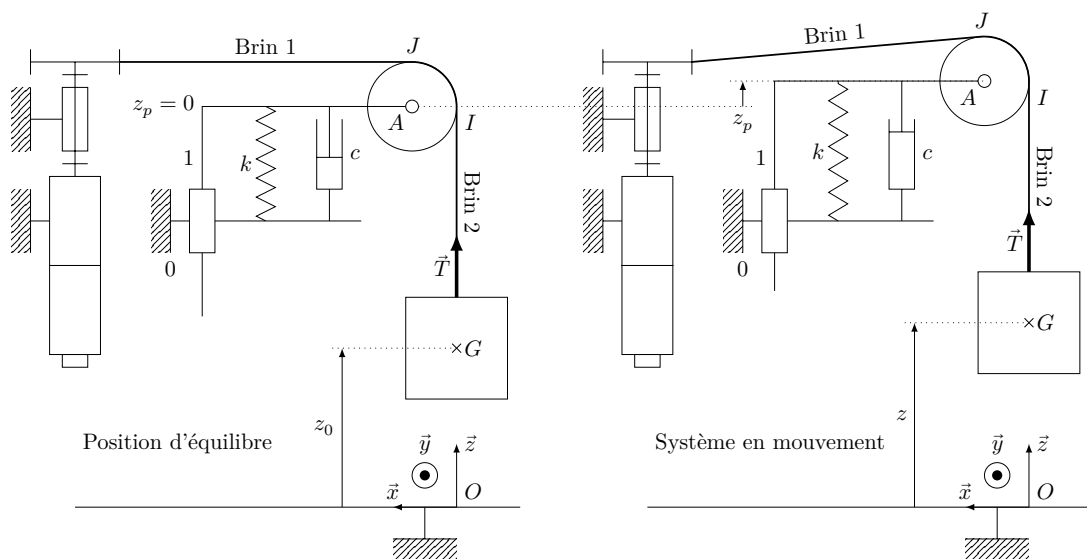


FIGURE 16 – Modélisation du système avec remise en cause de l'hypothèse de non déformation de la potence

Les réponses temporelles simulées du capteur d'effort à une consigne en échelon de vitesse de $3\,000\text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$, dans les mêmes conditions que celles de la figure 15, avec ce nouveau modèle pour différentes valeurs des paramètres k et c sont fournies sur la figure 17.

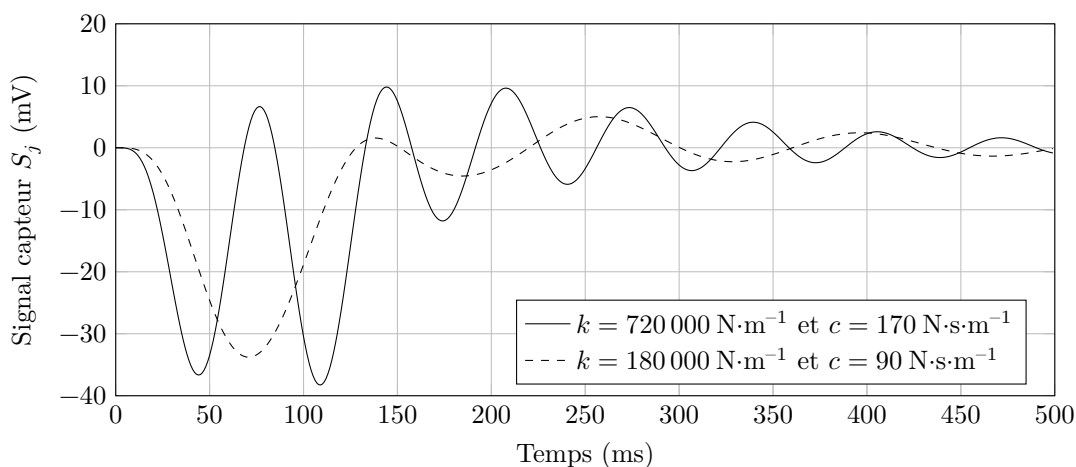


FIGURE 17 – Réponses du capteur vis-à-vis de l'échelon de consigne de $3\,000\text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$ pour différentes valeurs des paramètres

Q20. Valider l'origine des vibrations. Relever les pseudo-périodes des deux simulations et conclure sur le couple de paramètres (k, c) à retenir.

Conclusion - Le modèle du mécanisme de déplacement vertical est maintenant validé et ses paramètres connus, il est possible de l'utiliser pour mettre au point la commande collaborative.

5 Analyse des performances de la boucle collaborative

5.1 Structure et performances de la boucle collaborative

La commande collaborative génère la consigne de la chaîne de motorisation asservie à partir du signal en sortie du capteur d'effort placé dans la poignée S_j . Le mouvement engendré par la motorisation a pour objectif de satisfaire l'utilisateur et donc d'annuler l'effort qu'il doit exercer. Le bras manipulateur collaboratif peut alors être modélisé par un asservissement du signal en sortie du capteur d'effort. La consigne de cet asservissement est alors nulle (fonctionnement en régulation).

Le signal S_j délivré par la poignée est à la fois affecté par l'effort exercé par l'utilisateur sur la poignée et par la souplesse de la potence articulée.

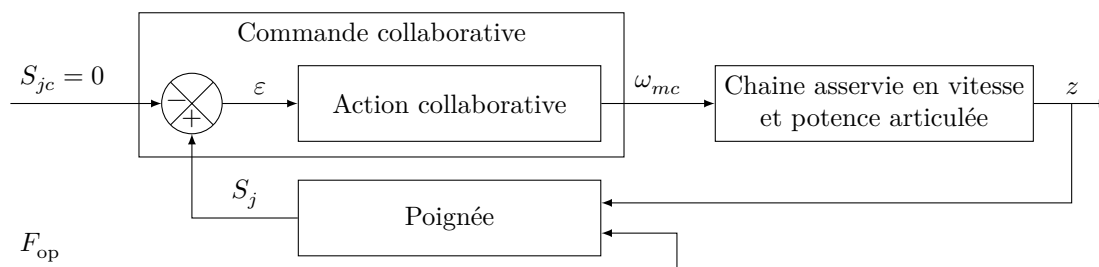


FIGURE 18 – Architectures fonctionnelle et matérielle du bras manipulateur collaboratif

Le modèle de simulation complet incluant la commande collaborative permet de simuler la réponse

du bras manipulateur collaboratif pour une charge à déplacer de masse $M = 100$ kg et un effort exercé par l'utilisateur $F_{op} = -20$ N (dirigé vers le bas) du type échelon (voir figure 19).

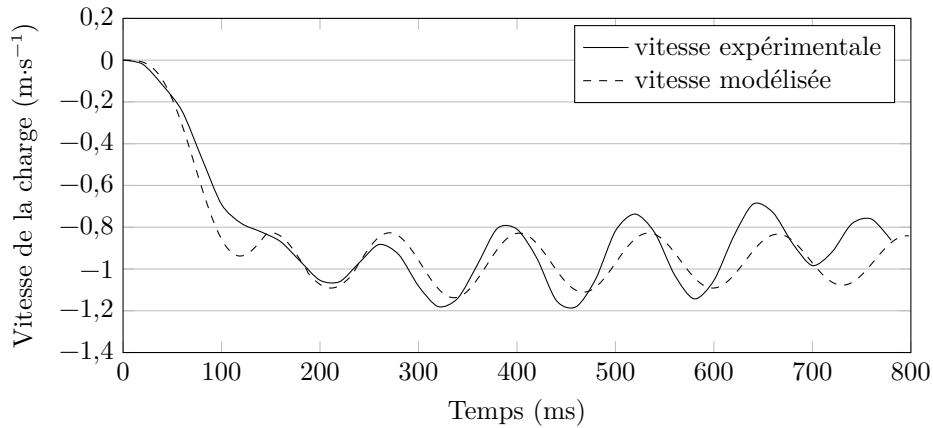


FIGURE 19 – Vitesses de la charge simulée et expérimentale en fonction du temps

Conclusion - Le modèle du système complet, en l'absence de filtre, étant validé, il est nécessaire d'introduire un filtre dans la commande collaborative afin de limiter les vibrations.

5.2 Mise en place du filtre de la commande collaborative

Objectif

Analyser et valider le choix du filtre de la commande collaborative.

Afin d'améliorer les performances, le constructeur met en place un filtre DSC (*Dynamic Stability Control*) dans la boucle collaborative (bloc « action collaborative »). Ce filtre DSC est élaboré par un microcontrôleur et est donc réalisé en numérique.

Les différents instants d'échantillonnage sont notés t_k et la période d'échantillonnage est $T_e = 20$ ms. La valeur d'une fonction temporelle $s(t)$ à l'instant t_k , $s(t_k)$ est notée $s(k)$ pour simplifier les écritures.

Soient $s_j(t)$ le signal en sortie du capteur d'effort de la poignée et $s_f(t)$ le signal en sortie du filtre. L'équation de récurrence à implanter dans le microcontrôleur est donnée par :

$$s_f(k) = b_0 s_j(k) + b_1 s_j(k-1) + b_2 s_j(k-2) - a_1 s_f(k-1) - a_2 s_f(k-2)$$

avec b_0 , b_1 , b_2 , a_1 et a_2 des coefficients constants dépendants de ω_0 et de T_e .

Le filtre numérique précédent est implanté dans le modèle complet du bras manipulateur collaboratif. Les résultats de la simulation pour une charge à déplacer de masse $M = 100$ kg et un effort de l'utilisateur $F_{op} = -20$ N (dirigé vers le bas) du type échelon sont donnés sur la figure 20.

Q21. Les exigences id 1.2, id 1.4.1 et id 1.4.3 sont-elles satisfaites ?

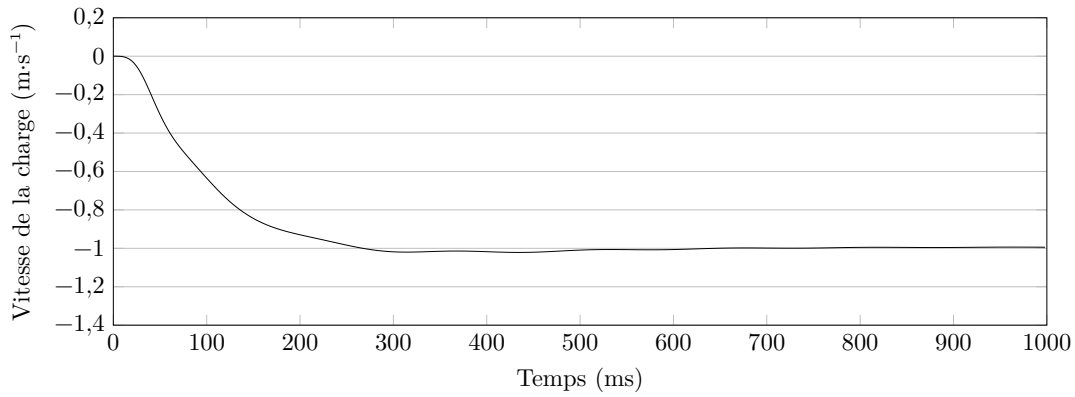


FIGURE 20 – Vitesse de la charge simulée avec commande collaborative et filtre DSC

5.3 Vérification des performances globales

Objectif

Vérifier les performances globales de la solution industrielle proposée par la société SAPELEM.

Sur le bras manipulateur collaboratif et en présence du filtre DSC, différents échelons d'effort sur la poignée et avec différentes charges à déplacer de masse variable sont réalisés. Les résultats expérimentaux sont consignés dans la figure 21.

Q22. En analysant précisément les résultats expérimentaux de la figure 21, vérifier que les exigences du commanditaire sont satisfaites.

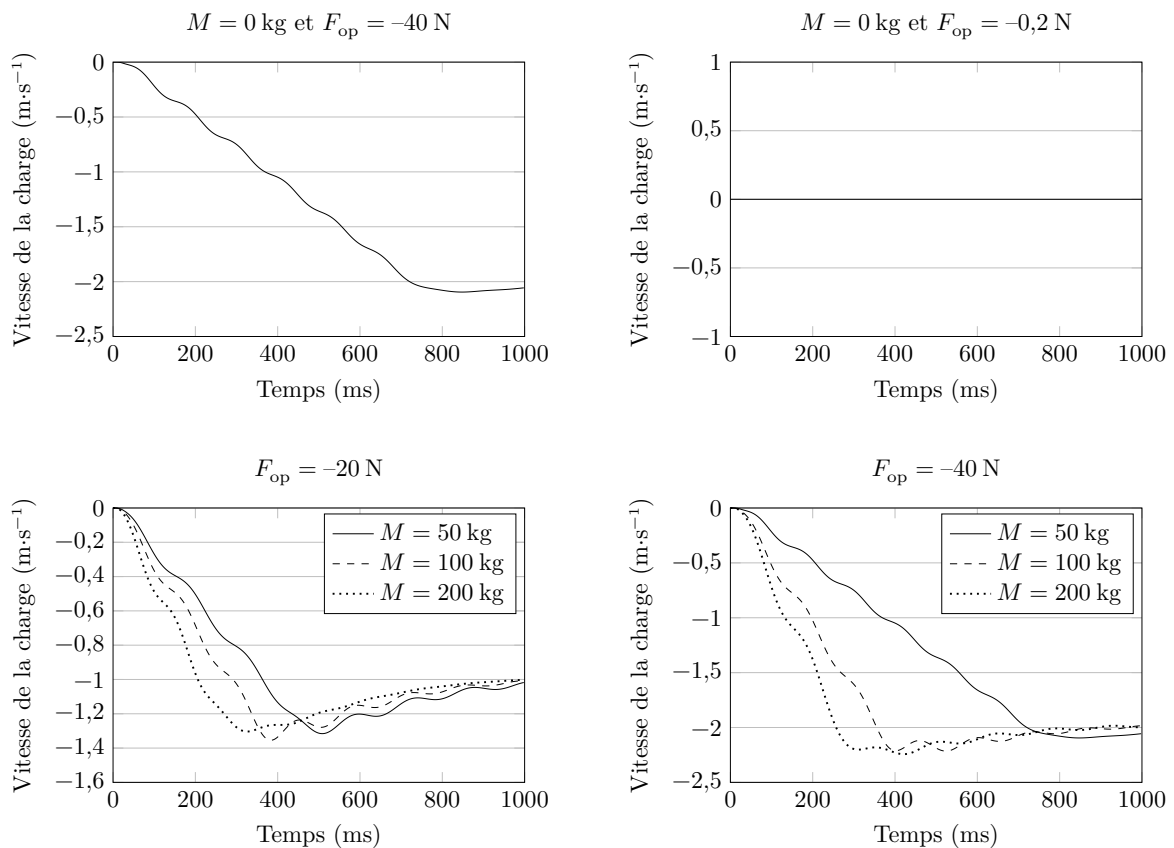


FIGURE 21 – Résultats expérimentaux obtenus sur le système réel avec le filtre DSC

Transformées de Laplace

f(t)	F(p)
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
f(t-τ)	$e^{-p\tau} F(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0^+)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p)$ avec C.I. = 0
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$ avec C.I. = 0
$\delta(t)$	1
u(t)	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Théorème de la valeur initiale : (si la limite existe)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur finale : (si la limite existe)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

COMPLEMENT DE COURS

décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Ce complément de cours présente quelques techniques de calcul de la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles rencontrées dans le cours SLCI. L'objectif de la décomposition est de transformer une fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles simples dont on pourra facilement déterminer la transformée de Laplace inverse (voir chapitre 4 du cours SLCI).

On se limitera volontairement aux fractions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$ telles que :

- $\deg N(p) < \deg D(p)$
- $D(p) = \prod_i (p - p_i)$ avec
 - soit p_i réels
 - soit un ou plusieurs p_i complexes. On considère alors le ou les complexes conjugués $\overline{p_i}$. On a alors $(p - p_i)(p - \overline{p_i}) = p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2$ avec $p_i = \alpha + i\beta$. $D(p)$ est alors un produit de polynômes réels de $\deg \leq 2$.

Etude des cas typiques

Etape 1 : forme de la décomposition

➤ Cas n°1 : $D(p)$ n'a que des racines simples réelles :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_i (p - p_i)} = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i} \quad \text{Ex 1 : } S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)}$$

➤ Cas n°2 : $D(p)$ n'a que des racines réelles dont une multiple :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)^n \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{(p - p_k)^j} \quad \text{Ex 2 : } S(p) = \frac{3p^2 + 2p + 1}{(p+2)^3(p+3)}$$

➤ Cas n°3 : $D(p)$ a une racine complexe :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)(p - \overline{p_k}) \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \frac{Bp + C}{p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2} \quad \text{Ex 3 : } \frac{1}{(p^2 + 2p + 5)(p+1)}$$

Etape 2 : détermination de coefficients

➤ Par identification : on recompose la fraction rationnelle à partir de la forme décomposée puis on identifie avec la fraction d'origine.

➤ Par calcul de limite (quand cela est possible) : $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{N(p)}{D(p)} (p - p_i)$

➤ Par utilisation de valeurs particulières : 0, 1, -1 ...

CORRECTIONExemple 1 :

$$S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)} = \frac{A}{p+4} + \frac{B}{p+1}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4).S(p) = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad B = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = -\frac{1}{3}$$

$$S(p) = \frac{\frac{7}{3}}{p+4} + \frac{-\frac{1}{3}}{p+1}$$

Exemple 2 :

$$S(p) = \frac{3p^2+2p+1}{(p+2)^3(p+3)} = \frac{A}{(p+2)^3} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2)^3.S(p) = 9 \quad \text{et} \quad D = \lim_{p \rightarrow -3} (p+3).S(p) = -22$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = C + D \Rightarrow C = 22$$

$$p=0 : \frac{1}{24} = \frac{9}{8} + \frac{B}{4} + \frac{22}{2} - \frac{22}{3} \Leftrightarrow B = -19$$

$$S(p) = \frac{9}{(p+2)^3} + \frac{-19}{(p+2)^2} + \frac{22}{p+2} + \frac{-22}{p+3}$$

Exemple 3 :

$$S(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p+1)} = \frac{A.p+B}{p^2+2p+5} + \frac{C}{p+1}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$p=0 : \frac{1}{5} = \frac{B}{5} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$S(p) = -\frac{\frac{1}{4}.p + \frac{1}{4}}{p^2+2p+5} + \frac{\frac{1}{4}}{p+1}$$

Nom, prénom :

Classe :

- DOCUMENT RÉPONSES -

Q17.

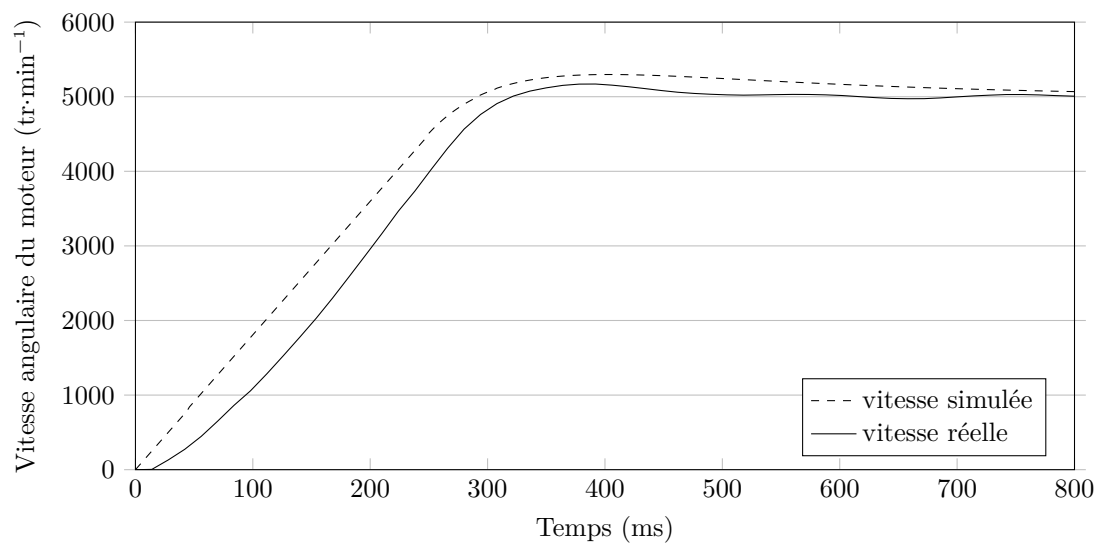


FIGURE 22 – Réponses temporelles simulée et réelle de la chaîne de motorisation asservie à un échelon de vitesse

Critère	Simulation	Expérimental	Écart relatif (%)
Valeur finale			
Temps de réponse			

Nom, prénom :

Classe :

Q4.

