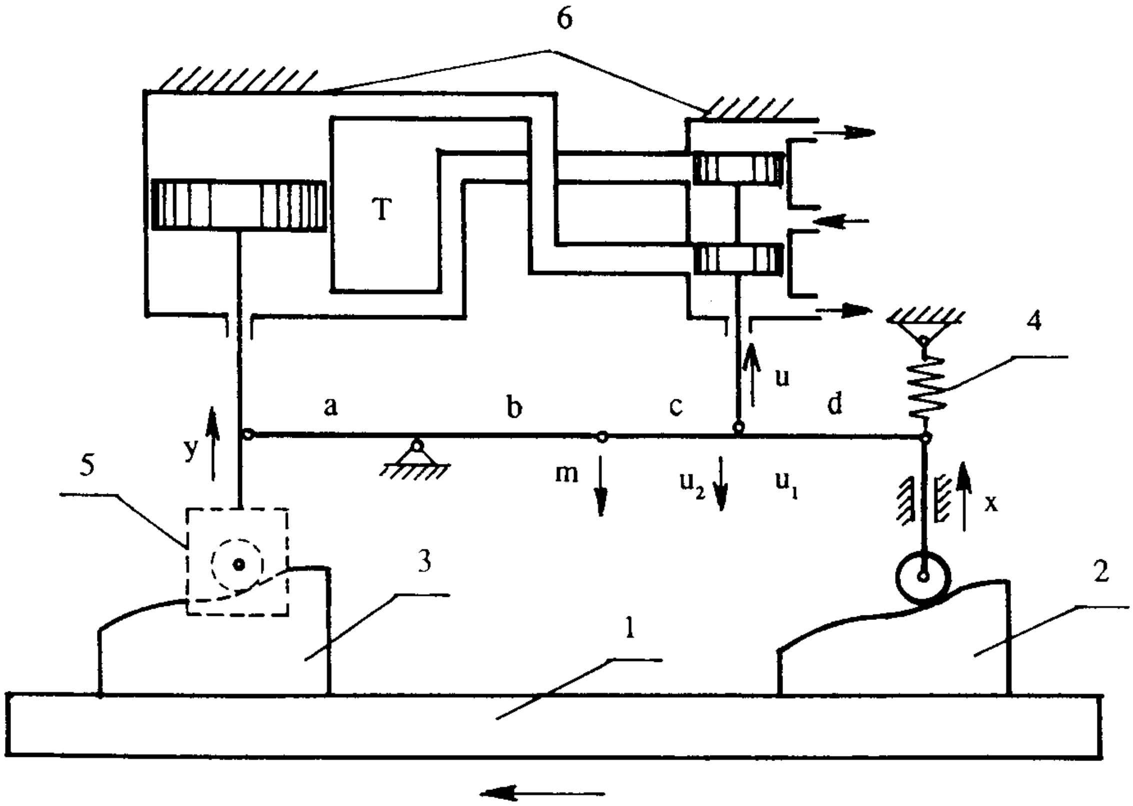
Exercice : Servomécanisme

On donne le schéma simplifié du servomécanisme d'une fraiseuse à reproduire:



1- table de travail, **2**- étalon, **3**- pièce usinée, **4**- ressort assurant le contact du galet,
5- tête fraiseuse, **6**- vérin hydraulique (T constante de temps de l'ensemble vérin-distributeur).

x(t) est le signal d'entrée du servomécanisme et la sortie est la position y(t) de la fraise.

Le levier (c,d) joue ici le rôle du comparateur et réalise la soustraction de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
Les relations géométriques donnent :

$$u(t) = u_1(t)-u_2(t) \qquad u_1(t)=\frac{c}{c+d}\,x(t) \qquad u_2(t)=\frac{d}{c+d}\,m(t) \qquad m(t)=\frac{b}{a}\,y(t)$$

de plus le vérin hydraulique est un élément intégrateur simple représentable sous la forme :

$$T\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

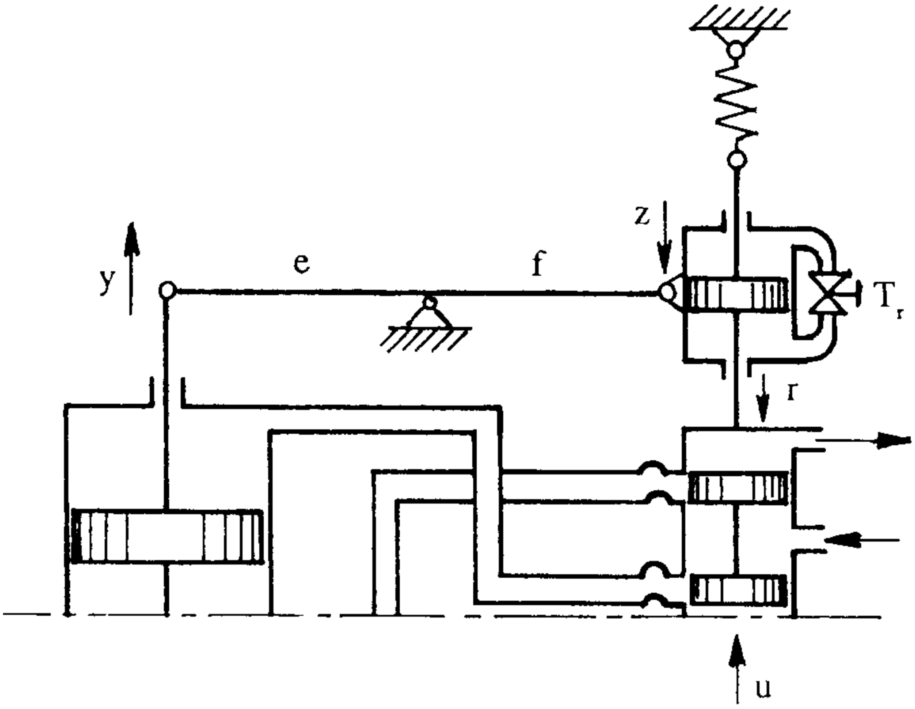
Toutes les dimensions a,b,c et d sont constantes

1. *Tracez le diagramme fonctionnel du servomécanisme décrit ci-dessus.*
2. *Déterminez la fonction de transfert du système et représentez-la sous la forme:*

$$G(p) = \frac{K}{1+T_1.p} \qquad \textit{où K et } T_1 \textit{ seront explicités.}$$

3. *Donnez la relation entre a, b, c et d pour les dimensions de la pièce usinée soient les mêmes que celles de l'étalon.*
4. Pour juger de la qualité de l'usinage on applique un échelon de vitesse au système x(t) = wt avec w constant.
   Déterminez la réponse de ce système.
   Déterminez la valeur de l'écart en régime permanent entre la sortie réelle et la sortie désirée.

Pour remédier à cet écart, on rajoute sur la partie supérieure du servomécanisme un retour auxiliaire, consistant en un élément dérivateur.
Dans ce cas l'ouverture du distributeur ne dépend plus uniquement du déplacement du tiroir, mais de la somme des déplacements u(t)+r(t) (le cylindre est mobile et son déplacement est égal à r(t))



On donne l'équation de cet amortisseur hydraulique :

$$T_r \frac{dr(t)}{dt} + r(t) = T_r \frac{dz(t)}{dt}$$

$$z(t) = -\frac{f}{e} y(t)$$

Les dimensions e et f sont constantes

5. *Tracez le diagramme fonctionnel du système.*

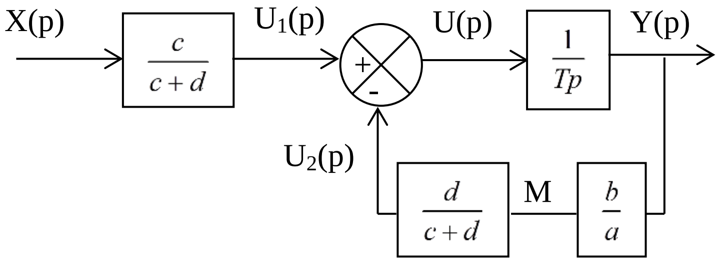
6. *Déterminez la fonction de transfert de ce système et montrez qu'elle peut s'écrire sous la forme*
$G(p) = \dfrac{k(T_r p + 1)}{T_2 T_r p^2 + (T_2 + mT_r)p + 1}$ *où m, k, T_2 seront explicités.*

7. On veut que le régime optimal soit le régime apériodique critique (c'est à dire le plus rapide sans oscillations). Le dénominateur de G(p) doit donc être de discriminant nul. *Donnez l'expression de m= m_{opt} en fonction de T_2 et Tr.*

8. Donnez l'expression de l'écart en régime permanent entre la sortie réelle et la sortie désirée pour l'entrée x(t) = wt en fonction de Tr,m et T_2.
Déterminez T_r en fonction de T_2 pour que cet écart soit nul. En déduire la valeur de m_{opt}.

Corrigé

Q1 :

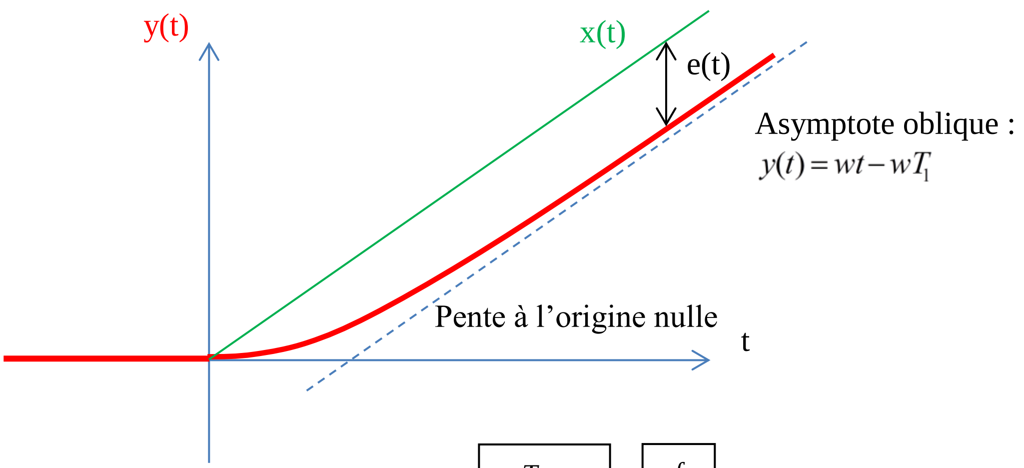


Q2 : $G(p)=\dfrac{\frac{1}{Tp}}{1+\frac{bd}{(c+d)a}\cdot\frac{1}{Tp}}\cdot\dfrac{c}{c+d}=\dfrac{ac}{aTp(c+d)+bd}=\dfrac{\frac{ac}{bd}}{1+T\frac{a(c+d)}{bd}p}$ d'où $K=\dfrac{ac}{bd}$ et $T_1=\dfrac{aT(c+d)}{bd}$

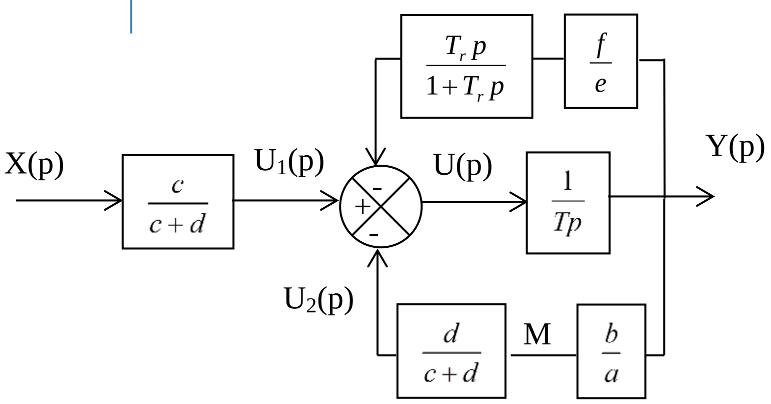
Q3 : x(t) = y(t) ne peut être obtenu qu'en régime permanent. G(p) est une fonction du premier ordre.
En régime permanent l'amplitude de la sortie vaut K*amplitude de l'entrée donc $x(\infty) = y(\infty) \Rightarrow K = 1$
D'où la condition : ac = bd

Q4 : $G(p)=\dfrac{1}{1+T_1p}$ donc $Y(p)=\dfrac{1}{1+T_1p}\cdot\dfrac{w}{p^2}=\dfrac{wT_1^2}{1+T_1p}-\dfrac{wT_1}{p}+\dfrac{w}{p^2}$ d'où $y(t)=w(t-T_1+T_1e^{-\frac{t}{T_1}})u(t)$

Ecart = $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t)-y(t))=\lim\limits_{p\to 0}p(X(p)-Y(p))=\lim\limits_{p\to 0}p(\dfrac{w}{p^2}-\dfrac{1}{1+T_1p}\dfrac{w}{p^2})=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{w}{p}(\dfrac{1+T_1p-1}{1+T_1p})=wT_1$



Q5 :



Q6 :

$$G(p) = \frac{ace(1 + T_r(p))}{p^2(ea(c+d)T_rT) + p(ae(c+d)T + eT_r db + fa(c+d)T_r) + edb} = \frac{\frac{ac}{db}(1 + T_r(p))}{T_r\frac{aT(c+d)}{db}p^2 + (\frac{aT(c+d)}{db} + T_r(1 + \frac{fa(c+d)}{edb}))p + 1}$$

D'où

$$k = \frac{ac}{bd} = 1 \qquad T_2 = \frac{aT(c+d)}{db} \qquad m = 1 + \frac{fa(c+d)}{edb}$$

Q7 : $\Delta = (T_2 + mT_r)^2 - 4T_rT_2 = 0$ d'où $(T_2 + mT_r) = 2\sqrt{T_rT_2} \Rightarrow m_{opt} = 2\sqrt{\frac{T_2}{T_r}} - \frac{T_2}{T_r}$

Q8 : $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = \lim\limits_{p\to 0} p(X(p) - Y(p)) = \lim\limits_{p\to 0} p(\frac{w}{p^2} - G(p)\frac{w}{p^2}) = \lim\limits_{p\to 0}\frac{w}{p}(\frac{T_2T_r p^2 + (T_2 + mT_r)p + 1 - k(T_r p + 1)}{T_2T_r p^2 + (T_2 + mT_r)p + 1})$

$\lim\limits_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = \lim\limits_{p\to 0}\frac{w}{p}(\frac{T_2T_r p^2 + (T_2 + mT_r)p - T_r p}{T_2T_r p^2 + (T_2 + mT_r)p + 1}) = T_2 + mT_r - T_r$

On veut un écart nul : $T_2 + mT_r - T_r = 0 \Rightarrow T_2 + mT_r = T_r \Rightarrow 2\sqrt{T_rT_2} = T_r \Rightarrow T_r = 4T_2$

de $T_2 + mT_r = T_r$ on déduit $T_2 = (1-m)T_r \Rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_r} = m = \frac{3}{4}$