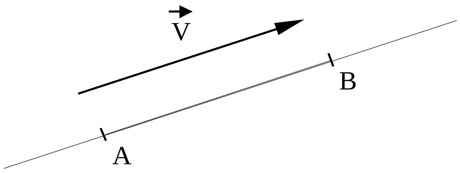
OUTILS DE LA MECANIQUE

Ce cours présente les outils mathématiques qui seront utilisés dans les chapitres de première année sur la mécanique du solide.

A) LES VECTEURS

1-vecteur libre



Soient A et B, 2 points de l'espace affine. Le vecteur libre $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ désigne l'un des bipoints équipollents au bipoint (A,B). Il est caractérisé par une direction, un sens, une norme.

2-Vecteur glissant

Le vecteur glissant (A, $\vec{V}$) désigne l'un des bipoints équipollents au bipoint (A,B) qui ont même support que (A,B). Il est caractérisé par une origine, une direction, un sens, une norme.

3-Base

Dans un espace vectoriel à 3 dimensions, le triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs linéairement indépendants désigne une base (b_1). Elle est dite orthogonale si les produits scalaires des vecteurs pris deux à deux sont nuls $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_i . \vec{e}_j = 0, \forall (i, j) \in (1,2,3)$ avec $i \neq j$ et orthonormée si en plus leur norme vaut 1 $\Leftrightarrow \forall i \in (1,2,3), \|\vec{e}_i\|^2 = \vec{e}_i . \vec{e}_i = 1$

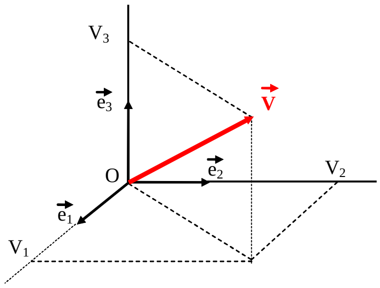
4-repère

En associant un point O de l'espace affine à cette base, on obtient un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ aussi noté (O,b_1).

5-Composantes scalaires d'un vecteur

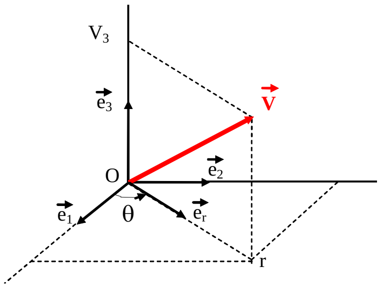
On peut exprimer un vecteur à l'aide d'une combinaison linéaire de ses composantes dans cette base.

En coordonnées cartésiennes



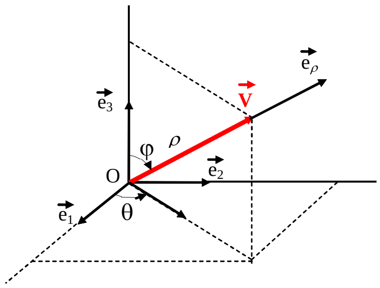
$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$$

En coordonnées cylindriques



$$\vec{V} = r\vec{e}_r + V_3\vec{e}_3$$

En coordonnées sphériques



$$\vec{V} = \rho\, \vec{e}_\rho$$

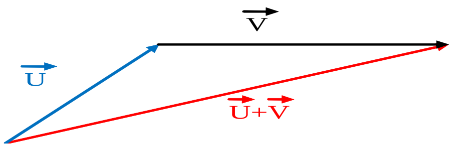
Remarques : on utilisera principalement les coordonnées cartésiennes

6-opérations vectorielles

Soit $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe. Soient U_1, U_2, U_3 et V_1,V_2,V_3 les coordonnées respectives de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$ dans la base B : $\vec{U} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}_B$ et $\vec{V} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}_B$

<u>6-1-somme</u>

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1)\vec{e}_1 + (U_2 + V_2)\vec{e}_2 + (U_3 + V_3)\vec{e}_3$$



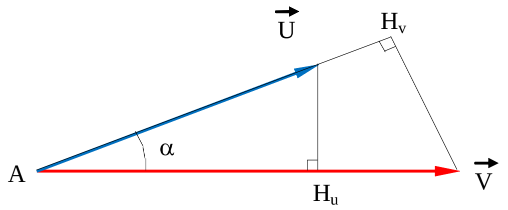
<u>6-2-Produit scalaire</u>

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de l'espace vectoriel.

On appelle produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, le scalaire noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tel que : $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\vec{U}, \vec{V})$

$$\overline{AH_u} = \vec{U}.\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

$$\overline{AH_v} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}.\vec{V}$$



Expression : $\vec{U}\cdot\vec{V} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}_B \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}_B = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$

Propriétés :

Symétrie : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

Bilinéarité : $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$

Multiplication par un scalaire : $k(\vec{U}.\vec{V}) = (k\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(k\vec{V})$

Si le produit scalaire est nul alors $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\cos(\vec{U},\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux

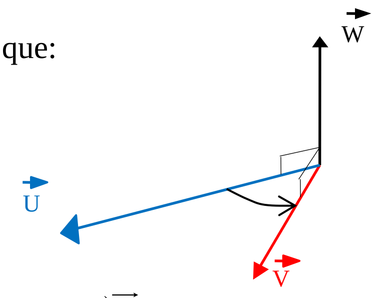
Remarque : $\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$

✍ *Déterminer les relations entre les coordonnées d'un vecteur $\vec{V}$ exprimé dans les différents systèmes de coordonnées.*

6-3-produit vectoriel

définition : le produit vectoriel de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que:

- $\vec{W}$ est orthogonal à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$
- $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment un trièdre direct
- $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times |\sin(\vec{U},\vec{V})|$



Expression : $\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}_B = (U_2V_3 - U_3V_2)\overrightarrow{e_1} + (U_3V_1 - U_1V_3)\overrightarrow{e_2} + (U_1V_2 - U_2V_1)\overrightarrow{e_3}$

Propriétés :

Antisymétrie : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$

Bilinéarité : $\vec{U} \wedge (\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$

Multiplication par un scalaire : $k(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (k\vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (k\vec{V})$

Si le produit vectoriel est nul alors $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\sin(\vec{U},\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires

✍ *Dans la base B, Donner l'expression des produits vectoriels suivants :* $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$ pour $i \neq j$.

7-Changement de bases :

7-1- Exemple d'une rotation *:*

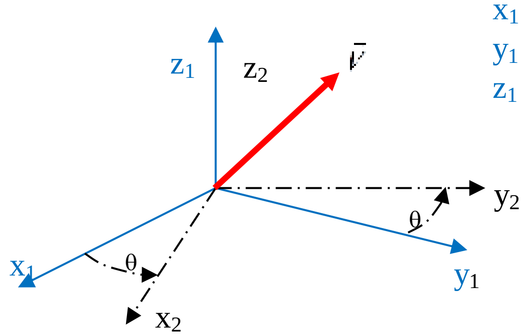
On considère 2 bases déduites l'une de l'autre par une rotation autour d'un vecteur commun. Un vecteur $\vec{V}$ étant exprimé dans la base B1 $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, on souhaite l'exprimer dans la base B2 $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.

notation

B1		B2
x_1		x_2
y_1	θ	y_2
z_1	$\rightarrow$	z_2

Il existe 2 méthodes

- par projection : On projette chacun des vecteurs unitaires de la base de départ dans la base d'arrivée.
- par calcul matriciel : On calcule les matrices de passage d'une base à l'autre et on obtient le résultat par multiplication matricielle.



✍ *Soit* $\vec{V} = a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{z_1}$. *Exprimer* $\vec{v}$ *dans la base* $B_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.

<u>7-2-Généralisation</u> : paramétrage d'Euler.

Pour orienter une base quelconque par rapport à une autre, Euler a défini trois rotations autour d'axes appartenant à des bases intermédiaires :

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & n & \xrightarrow{\theta} & n & & x_2 \\ y_1 & \psi & v & & w & \varphi & y_2 \\ z_1 & \rightarrow & z_1 & & z_2 & \rightarrow & z_2 \end{array}$$

ψ : angle de précession
θ : angle de nutation
φ : angle de rotation propre

✍ *Exprimer* $\overrightarrow{x_2}$ *dans la base* $B_1(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$.

B) LES TORSEURS

1-Définition, intérêt

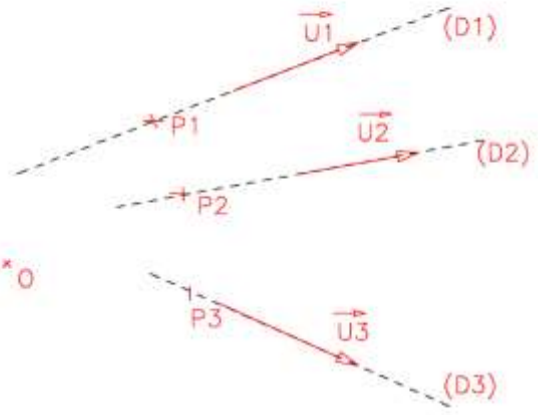
On appelle **torseur** un ensemble de vecteurs glissants en nombre quelconque. Il nous servira à **modéliser** des actions mécaniques, des mouvements, des quantités de mouvement, des quantités d'accélération, des efforts intérieurs,..

Pour décrire un torseur, on a recours à ses éléments de réduction qui sont exprimés en un point.

2-Eléments de réduction d'un torseur en un point

On appelle <u>somme</u> ou <u>résultante</u> du torseur, le vecteur libre somme des vecteurs libres des différents vecteurs glissants :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i$$



On appelle <u>moment en O</u> du torseur, le vecteur lié d'origine O, somme des moments en O des différents vecteurs glissants :

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{U}_i$$

$\vec{R}$ et $\vec{M}(O)$ sont appelés <u>éléments de réduction</u> du torseur en O.

Le torseur en O s'écrit donc :

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i \\ \vec{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{U}_i \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} Rx & Mox \\ Ry & Moy \\ Rz & Moz \end{array} \right\}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La somme vectorielle de plusieurs vecteurs libres est indépendante du point où elle est calculée. La résultante $\vec{R}$ du torseur est donc un <u>invariant</u>.

Cette description est l'équivalent d'une photographie que l'on aurait prise de l'être mathématique "torseur" depuis un certain endroit. Si l'on avait pris la photographie depuis un autre endroit, on aurait eu une autre image, bien que le torseur soit le même.

3-Changement de point de réduction

Soient A et B deux points de l'espace.

Si le torseur en A s'écrit : $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i \\ \vec{M}(A) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{U}_i \end{array} \right\}_A$ alors il s'écrit en B: $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i \\ \vec{M}(B) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{U}_i \end{array} \right\}_B$

Avec $\boxed{\vec{M}(B) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{M}(A) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}}$ (formule de BABAR)

formule de transport du torseur : **si** $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\}_A$ **alors** $\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_B$

4-Opérations sur les torseurs

Elles nécessitent d'exprimer les torseurs utilisés dans une même base et surtout en un même point.

4-1-Somme de deux torseurs

Soient deux torseurs T_1 et T_2 exprimés en O : $\{T_1\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_1\\ \vec{M}_1(O)\end{Bmatrix}_O$ et $\{T_2\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_2\\ \vec{M}_2(O)\end{Bmatrix}_O$

La somme des deux torseurs s'écrit : $\{T\}=\{T_1+T_2\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}=\vec{R}_1+\vec{R}_2\\ \vec{M}(O)=\vec{M}_1(O)+\vec{M}_2(O)\end{Bmatrix}_O$

4-2-Comoment de deux torseurs

Soient deux torseurs T_1 et T_2 exprimés en O : $\{T_1\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_1\\ \vec{M}_1(O)\end{Bmatrix}_O$ et $\{T_2\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_2\\ \vec{M}_2(O)\end{Bmatrix}_O$

Définition : le comoment des deux torseurs T_1 et T_2 est le scalaire : $C_{12}=\vec{R}_1.\vec{M}_2(O)+\vec{R}_2.\vec{M}_1(O)$

Propriété :

- Le comoment de deux torseurs est un invariant quel que soit le point où sont exprimés ces deux torseurs.
- L'automoment d'un torseur est le comoment de ce torseur par lui-même.

5-Torseurs particuliers

5-1-Torseur nul

Définition : Un torseur est nul si ses éléments de réduction en un point quelconque sont nuls. Il est noté {0}.
Propriété : Si un torseur est nul alors il est nul en tout point. On dit encore qu'un torseur est nul quand son moment en tout point de l'espace est nul.

5-2-Torseurs spéciaux

Torseur force ou glisseur :

Définition : On appelle torseur force ou glisseur, un torseur de résultante non nulle pour lequel il existe un point où son moment est nul.

$$\{G\}_A=\begin{Bmatrix}\vec{R}_G\\ \vec{O}\end{Bmatrix}_A$$

Propriétés :

- En tout point de la droite passant par A et de direction $\vec{R}_G$, le moment du torseur est nul. Cette droite est appelée support du glisseur $\{G\}$.
- Pour qu'un torseur soit un glisseur il faut et il suffit que son automoment soit nul.

Torseur couple

Définition : Un torseur est appelé torseur couple si sa résultante est nulle et si son moment n'est pas nul.

$$\{C\}_A=\begin{Bmatrix}\vec{O}\\ \vec{M_A}\end{Bmatrix}_{\forall A}$$

Propriété : Un torseur couple est indépendant du point où il est exprimé.

6-Axe central

Définition : L'axe central d'un torseur est l'ensemble des points où le moment est colinéaire à la résultante.
Propriétés :

- l'axe central d'un torseur est le lieu des points où le moment est minimum.
- L'axe central d'un glisseur est le support de ce glisseur.