

Exercice 1 : mécanique du point - distance de sécurité

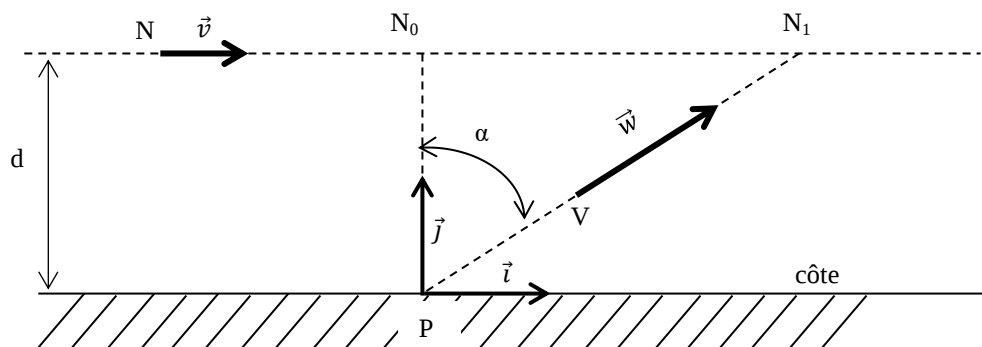
Deux voitures M_1 et M_2 se déplaçant à la même vitesse constante $V_0 = 108 \text{ km/h}$ en ligne droite se suivent à une distance d . M_1 se situe devant M_2 . A un certain moment correspondant à l'origine des temps ($t = 0 \text{ s}$), la voiture M_1 commence à freiner avec une décélération $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$. La voiture M_2 ne commence à freiner qu'avec un retard d'une seconde et une décélération $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$. On prendra l'origine des positions des deux voitures à $t = 0$.

Question 1 : Déterminer les expressions des vitesses (notées $V_1(t)$ et $V_2(t)$) et des positions (notées $x_1(t)$ et $x_2(t)$) des deux voitures en fonction du temps. Vous distinguerez les différents intervalles de temps nécessaires.

Question 2 : Quelle condition doit satisfaire d pour que la voiture M_2 s'arrête sans heurter M_1 ?

Exercice 2 : mécanique du point - rencontre maritime

Un navire longe une côte rectiligne à la vitesse constante $v = 1 \text{ m/s}$. A l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps, il passe en N_0 en face d'un port P à une distance $PN_0 = d$. A cet instant une vedette de vitesse constante $w = 2 \text{ m/s}$ part du port P pour rejoindre le navire. On note α l'angle entre la trajectoire rectiligne de la vedette et la normale à la côte, t_1 l'instant de la rencontre, N_1 le point de rencontre.



Question 1 : Exprimer le temps mis par le navire pour aller du point N_0 au point de rencontre N_1 en fonction de d , α et v .

Question 2 : Exprimer le temps mis par la vedette pour aller du port P au point de rencontre N_1 en fonction de d , α et w .

Question 3 : En déduire la valeur de l'angle α .

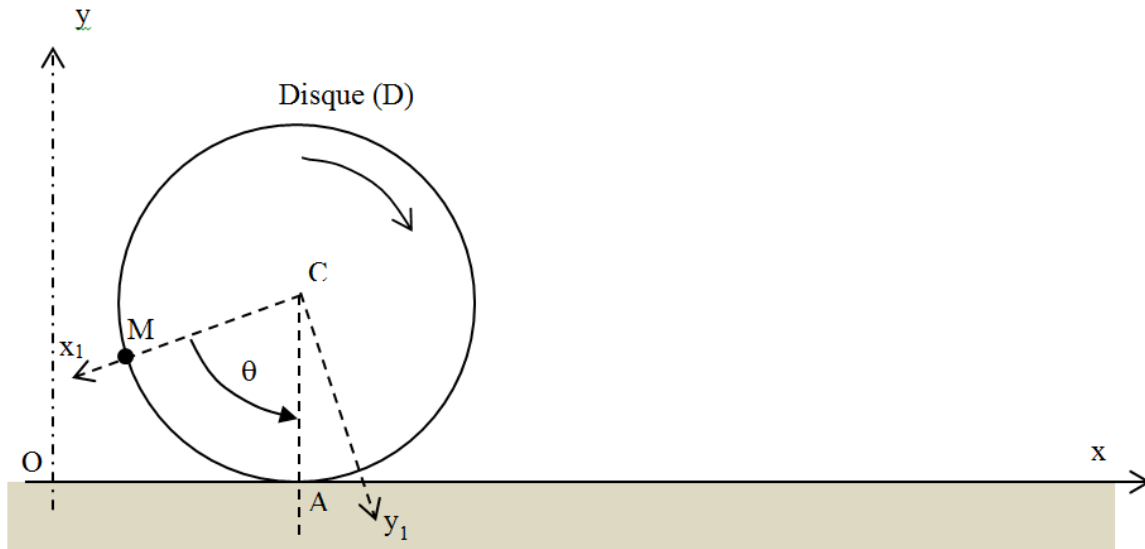
Question 4 : Donner les expressions des vecteurs positions à l'instant t ($t > 0$) du navire (vecteur $\overrightarrow{N_0 N}$) et de la vedette (vecteur $\overrightarrow{P V}$) dans le repère orthonormé $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Question 5 : Donner les expressions des vecteurs vitesses à l'instant t ($t > 0$) du navire (vecteur $\overrightarrow{V_{navire}}$) et de la vedette (vecteur $\overrightarrow{V_{vedette}}$) dans le repère orthonormé $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 : mécanique du point - cycloïde

Un disque D de centre C , de rayon r , roule (dans le sens horaire) sans glisser en A sur l'axe $(O, \vec{x})$ du repère fixe $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est lié au disque D avec $(\vec{x}_1, -\vec{y}) = \theta(t) = \omega t$ avec ω constant. Soit M un point lié au disque tel que $\overrightarrow{CM} = r\vec{x}_1$. A $t = 0$, le point M est en O .

On définit le repère $R_c(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ce repère est en translation par rapport à R .



Questions et travail demandé :

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (en fonction de r et θ) en projetant dans R la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}.$$
2. Donner l'expression de la vitesse de M (en fonction de r , θ et $\dot{\theta}$) par rapport au repère R : $\vec{V}(M/R)$
3. Donner l'expression de la vitesse de M par rapport au R_c : $\vec{V}(M/R_c)$
4. Donner l'expression de l'accélération de M par rapport au R_c : $\vec{\Gamma}(M/R_c)$
5. Vérifier que le produit scalaire $\vec{V}(M/R_c) \cdot \vec{\Gamma}(M/R_c)$ est bien nul.
6. Représenter graphiquement $\vec{V}(M/R_c)$ et $\vec{\Gamma}(M/R_c)$ (l'échelle importe peu) et caractériser le mouvement de M par rapport au repère R_c .
7. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère R sont :
$$\begin{cases} X(\theta) = r(\theta - \sin \theta) \\ Y(\theta) = r - r \cos \theta \end{cases}$$

Donner dans un tableau, les expressions de $X(\theta)$ et $Y(\theta)$ en fonction de r pour les valeurs de θ (en rad) suivantes : $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi, 7\pi/2, 4\pi$.

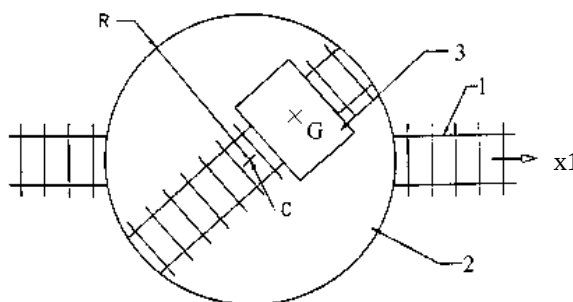
8. Tracer alors l'allure de la trajectoire de M dans R . Quel est le nom de la courbe obtenue ?

Exercice 4 : Plaque tournante

Un wagon (3) roule sur les rails d'une plaque tournante (2), en direction du centre.

Le repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est associé au sol avec $\vec{x}_1$ dans la direction des rails fixes.

Le repère $R_2(C, \vec{n}, \vec{t}, \vec{z}_1)$ est associé à la plaque tournante.



$$\overrightarrow{CG} = r(t) \vec{n}$$

$$\theta(t) = (\vec{x}_1, \vec{n})$$

Questions et travail demandé :

1. Tracer sur feuille les différents repères et le paramétrage.
2. Déterminer le vecteur vitesse de rotation de la plaque tournante par rapport au sol.
3. Déterminer le vecteur vitesse du point G dans son mouvement par rapport au sol : $\vec{V}_{(G \in 3/1)}$
4. Préciser, la composante représentant la vitesse relative et celle représentant la vitesse d'entraînement.
5. Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer la direction du vecteur vitesse.

cas 1: $r = \text{cste}, \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cste}$

cas2: $r = a.t + R$ avec a et R constants ; $\theta = \text{cste}$

cas3: $r = a.t, \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cste}$ avec a constant

Exercice 5 : Manège Spin fly

On s'intéresse au manège Spin Fly présent dans de nombreuses fêtes foraines.

Objectif : L'étude consiste à déterminer l'accélération subie par une personne, et de vérifier que la limite supportable (sans séquelle) par l'homme d'une valeur de $2g$ n'est pas dépassée....



Ce système est constitué de quatre solides :

- L'estrade **0** (plancher), de repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, fixe par rapport à la terre telle que l'axe $(O, \vec{z}_0)$ soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- Le plateau **1**, de repère associé $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$ par rapport à l'estrade **0** tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \varphi(t)$
- Le bras **2**, de repère associé $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{x}_1)$ par rapport au plateau **1** tel que $\vec{OB} = b \vec{z}_0$ (avec b constant), $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta(t)$.
- Le disque **3**, de repère associé $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en mouvement de rotation d'axe $(B, \vec{z}_2)$ par rapport au bras **2** tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = \alpha(t)$.

La position du point D du disque **3** est défini par : $\vec{BD} = c \vec{x}_3$ (avec $c = \text{constante} = 2.5\text{m}$).

- Q1.** Etablir le graphe des liaisons. Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des liaisons.
- Q2.** Représenter les figures planes de changement de bases associées aux angles φ , θ et α .
- Q3.** Donner l'expression du vecteur position de D dans le repère R_0 .
- Q4.** Donner l'expression du vecteur vitesse de rotation de 3 par rapport à 0.

Q5. Par dérivation du vecteur position, exprimer le vecteur vitesse de D par rapport au repère R_0 en fonction des paramètres géométriques et cinématiques. Vous exprimerez ce vecteur dans la base du repère R_3 .

Q6. Retrouver le résultat précédent par utilisation des formules de cinématique du solide.

On impose le fonctionnement suivant : $\dot{\varphi} = \text{constante} = \omega_1$; $\dot{\alpha} = \text{constante} = \omega_2$; $\theta = \text{constante} = \frac{\pi}{2}$

Q7. Donner l'expression de $\overrightarrow{V(D \in 3/0)}$ en fonction de c , ω_1 et ω_2 en prenant en compte les hypothèses énoncées ci-dessus.

Q8. Exprimer le vecteur accélération de D par rapport au repère R_0 en fonction des paramètres géométriques et cinématiques. Vous exprimerez ce vecteur dans la base du repère R_3

On se place dans le cas particulier suivant : $\dot{\varphi} = \dot{\alpha} = \text{constante} = \omega$; $\theta = \text{constante} = \frac{\pi}{2}$

Q9. Donner l'expression de la norme de cette accélération en fonction de c et ω .

Q10. Quelle valeur la vitesse de rotation ω (en tr/min) ne doit pas dépasser pour que l'accélération subie par une personne placée en D n'excède pas la valeur supportable de $2g$ (g étant l'accélération de la pesanteur).

Exercice 6 : Maquette de largage

Le Service des Grands Moyens d'Essais de l'O.N.E.R.A. (Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques) a réalisé un système de trajectographie captive. Lors du largage d'une charge par un avion porteur (missile, réservoir, ...), la trajectoire réelle de la charge s'écarte parfois considérablement de la trajectoire souhaitée. Du fait des phénomènes fortement non linéaires qui caractérisent les écoulements aérodynamiques, il se peut que la charge larguée soit prise dans les turbulences engendrées par l'avion et revienne percuter celui-ci.

Pour étudier ces phénomènes, il est en principe possible de former un modèle théorique implanté sur un système informatique qui résout numériquement ces équations. Or dans les cas complexes, ce calcul numérique est encore hors de portée des meilleurs codes de calcul et des meilleurs ordinateurs actuels. On a donc recours à ce que les ingénieurs utilisent depuis l'antiquité : un modèle matériel, une maquette.

Celle-ci consiste en une maquette d'avion à l'échelle 1/16, larguant une maquette de la charge à la même échelle. Chacune est portée par un bras articulé, doté de nombreux degrés de liberté et pouvant reproduire tous les mouvements tridimensionnels des objets portés (fig. 1 et 2).

La fonction du système de trajectographie est d'observer une trajectoire représentative de la trajectoire réelle de la charge larguée par rapport à l'avion en vol.

Dans ce sujet, on s'intéressera à une sous partie du système automatisé de déplacement de la charge par son bras robotisé.

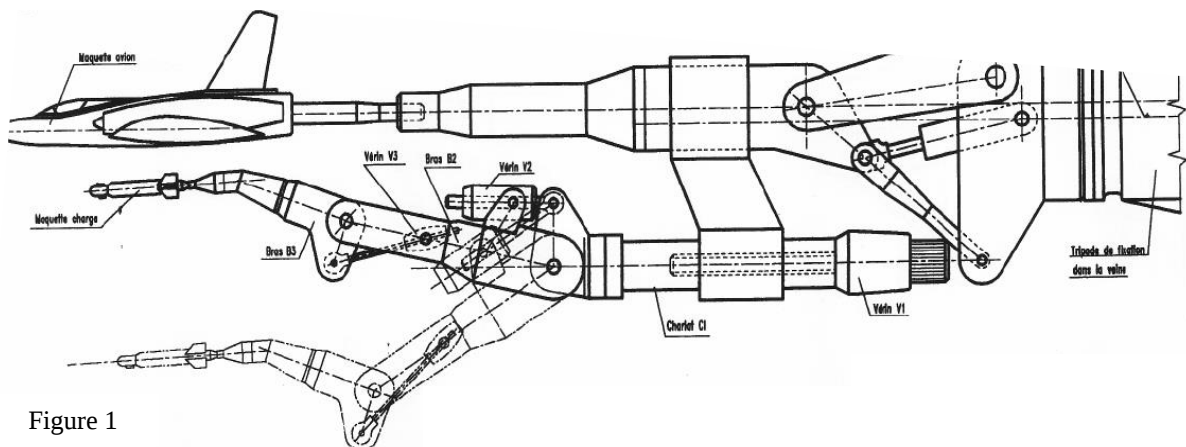


Figure 1

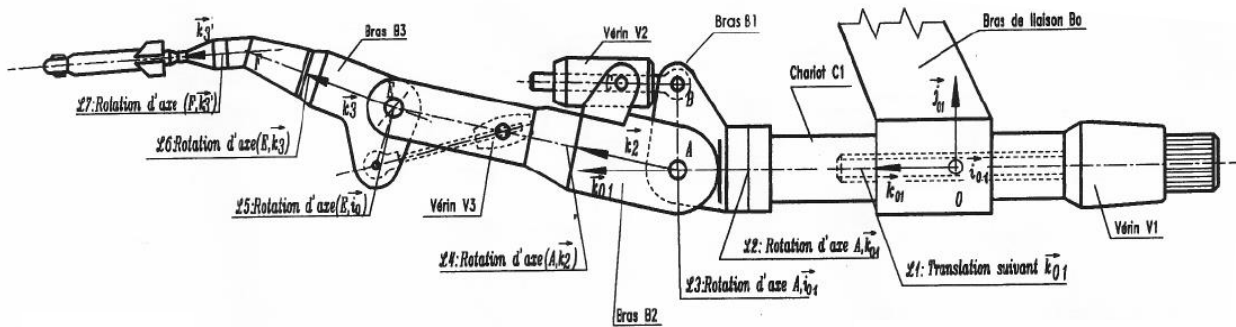


Figure 2

La définition d'une trajectoire de la charge nécessite d'imposer, en permanence, des relations entre les valeurs instantanées des paramètres cinématiques.

Objectif : Chacune des liaisons étant motorisée par une structure asservie en position, on cherche les relations cinématiques qui donneront les lois de commande de chacun des moteurs du bras robot.

On se propose d'établir les relations dans un cas simple. **Seules les liaisons (L1), (L3) et (L5)** sont animées (voir le paramétrage sur la figure 3 ci-dessous). Dans ce cas, le bras de liaison BO est noté (0), l'ensemble (C1-B1) forme un solide noté (1), les deux parties du bras B2 forment un solide noté (2), les deux parties du bras B3 et la charge forment un solide noté (3).

- un repère lié à un solide porte l'indice du solide (exemple R_1)
- un vecteur lié à un solide porte l'indice du solide (exemple $\vec{k}_2$)
- un vecteur lié à 2 solides porte les indices des solides (exemple $\vec{k}_{01}$)

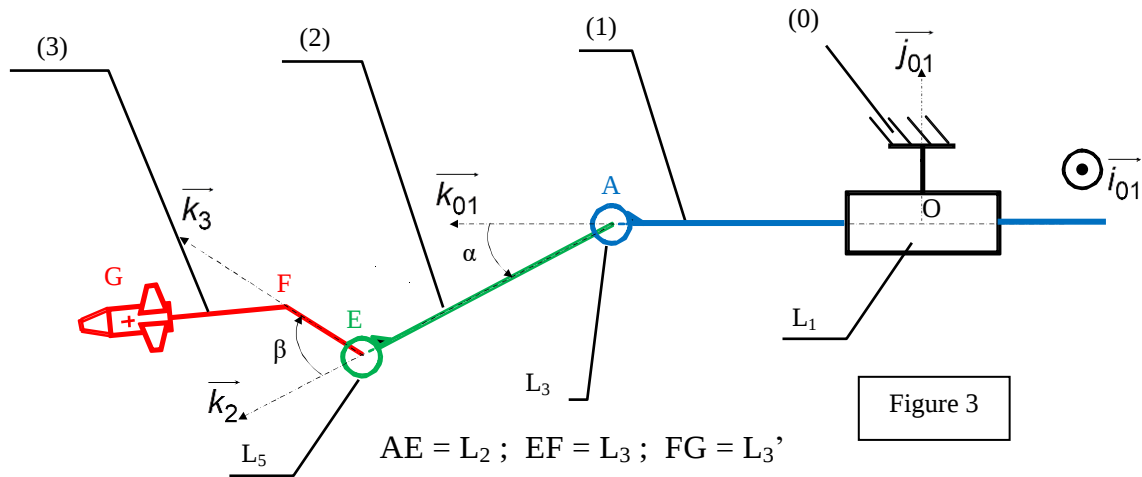


Figure 3

- (L1) : liaison motorisée 1/0, R_1 se déduit de R_0 par translation $\vec{OA} = \lambda(t) \cdot \vec{k}_{01}$
- (L3) : liaison motorisée 2/1, R_2 se déduit de R_1 par rotation d'axe $(A, \vec{i}_{01})$ et d'angle $\alpha = (\vec{j}_{01}, \vec{j}_2)$
- (L5) : liaison motorisée 2/3, R_3 se déduit de R_2 par rotation d'axe $(E, \vec{i}_{01})$ et d'angle $\beta = (\vec{j}_2, \vec{j}_3)$

1- Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(F, 3/0)$ en fonction du paramétrage proposé.

2- Dans le repère lié à l'avion, un des mouvements de la charge 3/0 le plus simple que l'on puisse envisager est une translation suivant $-\vec{j}_{01}$; dans ce cas :

2.1- Quelle relation existe-t-il alors entre $\omega_{2/1}$ et $\omega_{3/2}$?

2.2- Quelle relation existe-t-il alors entre $\alpha, \dot{\alpha}$ et $\dot{\lambda}$?

2.3- Donner l'expression des normes de $\vec{V}(F, 3/0)$ et de $\vec{V}(G, 3/0)$

Exercice 7 : Centrifugeuse humaine

L'élargissement du domaine de vol des avions de combat modernes soumet les pilotes de chasse à des niveaux d'accélération de plus en plus élevés. L'accélération ressentie par le pilote est généralement exprimé en « équivalent » pesanteur noté G ($1 G = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Dans le cadre de l'entraînement physiologique des pilotes, l'utilisation d'une centrifugeuse humaine est un moyen avantageux de recréer au niveau du sol, l'accélération subie en opération. La figure 1 présente une centrifugeuse humaine où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre solides (support, bras, anneau et nacelle) assemblés par liaison pivot.

La figure 2 représente le modèle cinématique de la centrifugeuse.

l'objectif de l'e

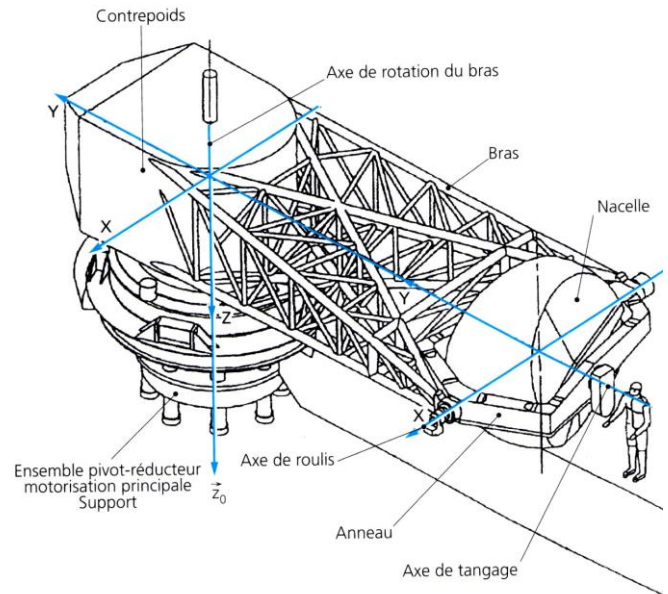


Figure 1

Elle est constituée :

- d'un bras 1 de longueur $OI = R$, en liaison pivot d'axe $O\vec{z}_0$ par rapport à un bâti 0, sa position est paramétrée par l'angle ψ ,
- d'un anneau 2 en liaison pivot d'axe $I\vec{x}_1$ et de paramètre θ par rapport à l'axe $O\vec{y}_1$ lié au bras 1. θ est appelé l'angle de roulis.
- D'une nacelle 3 dans laquelle prend place le pilote, en liaison pivot d'axe $I\vec{y}_2$ et de paramètre φ par rapport à l'axe $I\vec{x}_2$ lié à l'anneau 2. φ est appelé angle de tangage.

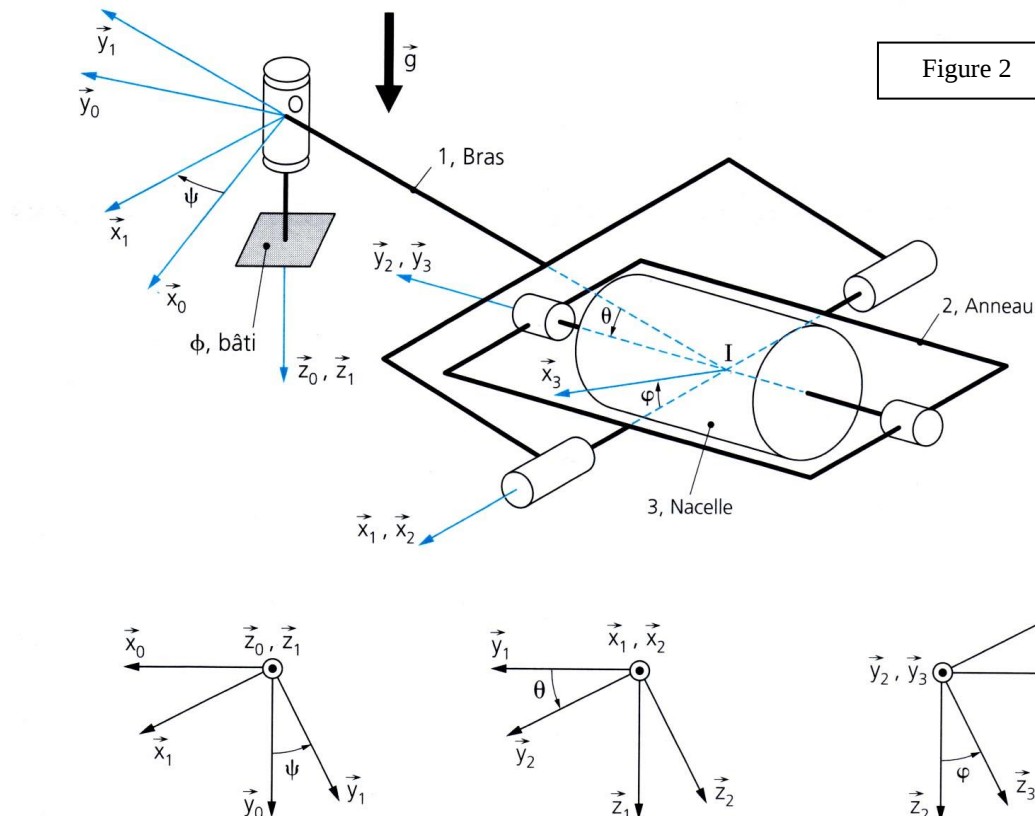


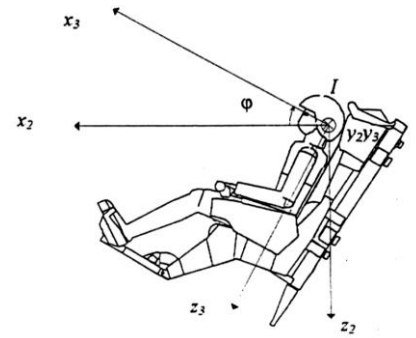
Figure 2

Nota : les angles sont représentés positifs et les différents repères sont orthonormés directs.

La vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote et l'orientation de la nacelle en roulis et en tangage fixe la direction de l'accélération imposée au pilote.

Remarque : I correspond au centre de la tête du pilote, zone à préserver absolument ! En effet, toute accélération latérale (selon la direction $\vec{y}_3$) entraîne la mort du pilote et il faut donc le solliciter uniquement dans les deux autres directions !

Objectif : établir les relations cinématiques qui sont aussi les lois de commande moteur, permettant de faire subir au pilote une accélération « verticale » (suivant $\vec{z}_3$).

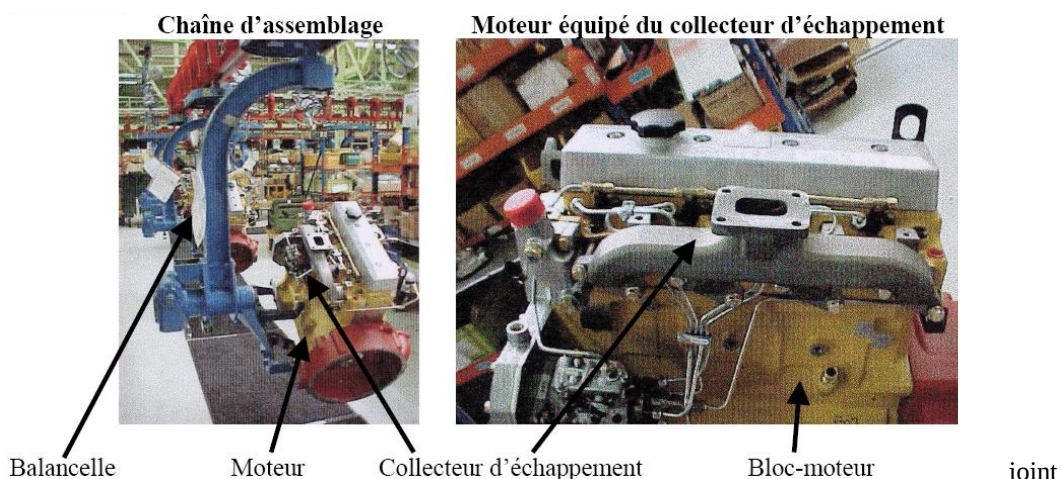


1. Déterminer les vecteurs rotation instantanée des mouvements relatifs 1/0, 2/1 et 3/2.
2. Exprimer le vecteur $\vec{V}(I, 3/0)$ du point I dans le mouvement de 3 par rapport à 0. Donner son expression en projection sur la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
3. Exprimer le vecteur $\vec{\Gamma}(I, 3/0)$ du point I dans le mouvement de 3 par rapport à 0. Donner son expression en projection sur la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Soit $\vec{G} = \vec{g} - \vec{\Gamma}(I, 3/0)$ le vecteur qui caractérise le nombre de « g » qui s'applique sur le pilote en I au cours de l'exercice. L'accélération de la pesanteur $\vec{g} = g \cdot \vec{z}_0$

4. Déterminer la projection suivant $\vec{y}_3$ du vecteur $\vec{G}$. En déduire la condition sur l'angle θ pour générer une composante G_y nulle suivant l'axe $\vec{y}_3$ en fonction de R, g et $\dot{\psi}$.
5. Déterminer la projection suivant $\vec{x}_3$ du vecteur $\vec{G}$. En déduire la condition sur l'angle φ pour générer simultanément les composantes G_x et G_y nulles respectivement suivant l'axe $\vec{x}_3$ et $\vec{y}_3$ en fonction de $R, g, \dot{\psi}$ et $\ddot{\psi}$.

Exercice 8 : Manipulateur auto-équilibré



La société John Deere conçoit et fabrique du matériel agricole. L'usine, située dans le Loiret, est chargée de la fabrication et du montage des moteurs Diesel de 3, 4, ou 6 cylindres. Les photos ci-dessus montrent la chaîne d'assemblage des moteurs, ceux-ci étant maintenus sur des balancelles. La pièce qui a pour fonction principale de collecter les gaz d'échappement issus des cylindres pour les envoyer vers le pot d'échappement s'appelle le collecteur d'échappement.

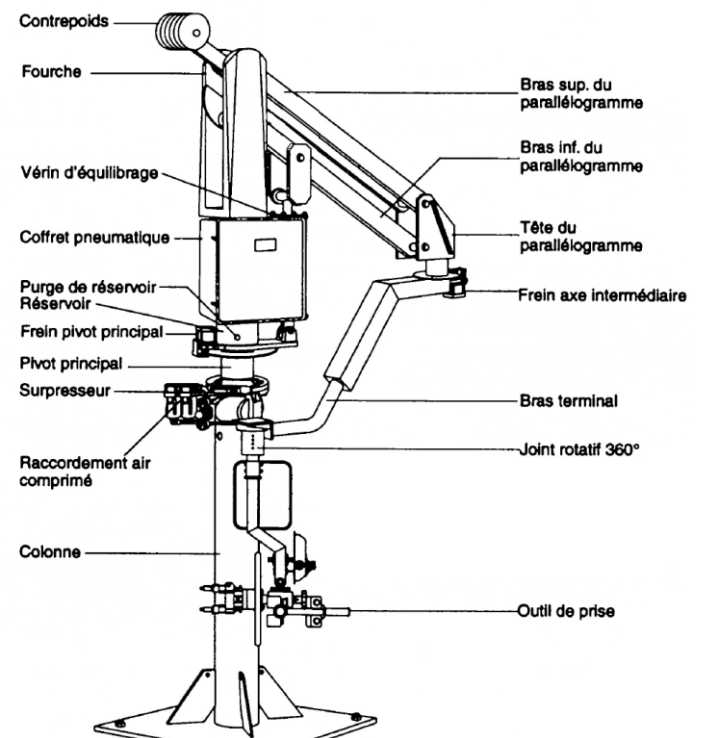


L'étanchéité aux gaz d'échappement entre le moteur et le collecteur d'échappement est réalisée par des joints liquides. la dépose du joint liquide est effectuée sur une machine de dépose automatisée.

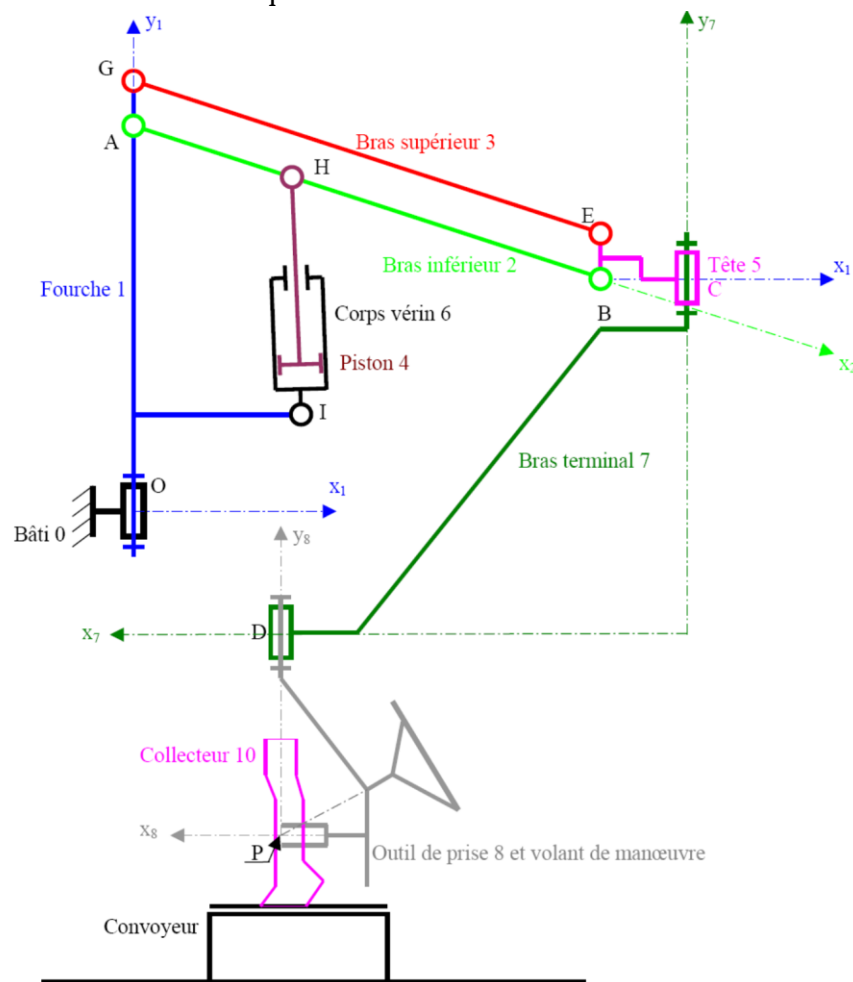
Analyse cinématique du manipulateur :

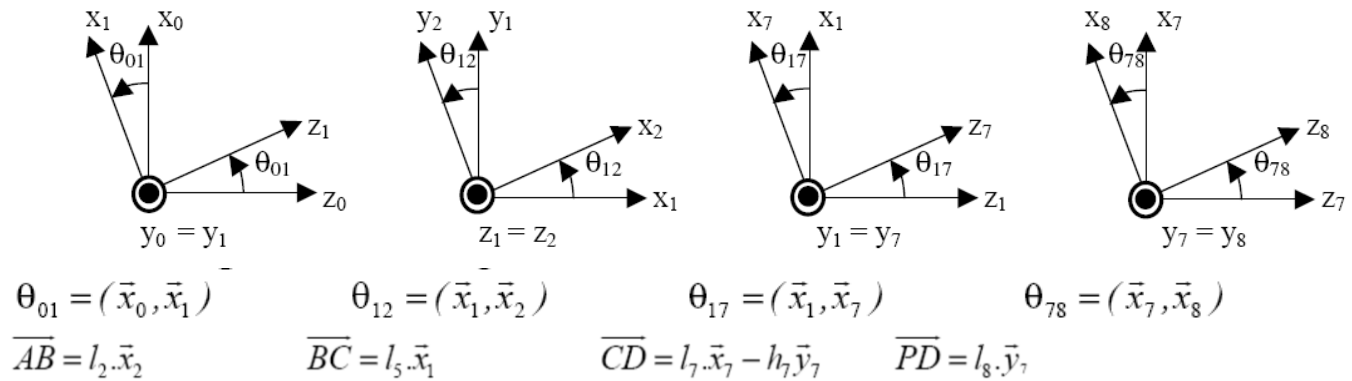
Le manipulateur aide l'ouvrier dans la prise du collecteur (masse de 17 kg pour les collecteurs 6 cylindres). La préhension du collecteur est effectuée par l'outil de prise. Un vérin d'équilibrage alimenté par de l'air comprimé à 0,70 MPa, fournit un effort qui compense le poids du collecteur. L'utilisateur maintient l'outil de prise et peut commander le vérin d'équilibrage, qui n'agit que lors d'un mouvement de montée ou de descente. Les autres mouvements possibles sont assurés manuellement par l'ouvrier.

Le dessin ci-dessous représente un dessin du manipulateur dans une position repliée, lors de la prise de pièce, le collecteur d'échappement étant au départ sur un convoyeur.



Objectif : effectuer une étude cinématique du manipulateur dans la position proposée, laquelle est paramétrée sur le schéma cinématique donné ci-après. Cette étude est préalable à une étude dynamique permettant de dimensionner l'actionneur du manipulateur et de valider le choix de la structure mécanique.





- Q1- Déterminer $\overline{V(B, 2/1)}$ en fonction de $l_2, \dot{\theta}_{12}$ en projection sur $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Q2- Au cours du mouvement du manipulateur, $\overline{BC}$ reste horizontal, orienté selon $\vec{x}_1$. Justifier. Quel est alors le mouvement de 5/1 ? En déduire $\overline{V(C, 7/1)}$ en projection sur $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Q3- Déterminer $\overline{V(D, 7/1)}$ en fonction de $l_2, l_7, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{17}$ en projection sur $\vec{y}_2$ et $\vec{z}_7$.
- Q4- Déterminer $\overline{V(P, 8/1)}$ en fonction de $l_2, l_7, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{17}$ en projection sur $\vec{y}_2$ et $\vec{z}_7$.
- Q5- Exprimer $\overline{V(P, 8/0)}$ en fonction de $\overline{V(P, 8/1)}$ et du vecteur rotation $\Omega(1/0)$.
- Q6- Déterminer $\overline{V(P, 8/0)}$ en fonction de $l_2, l_5, l_7, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{17}, \dot{\theta}_{01}, \theta_{12}$ en projection sur $\vec{y}_2, \vec{z}_1, \vec{z}_7$.

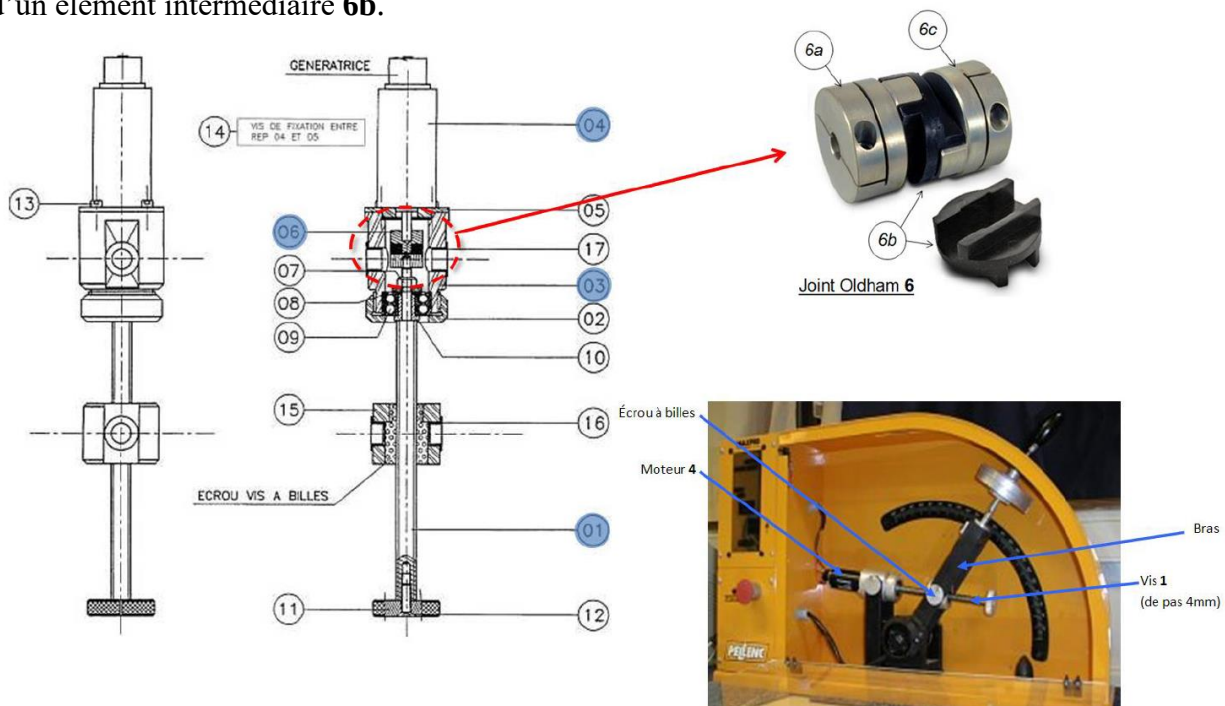
Exercice 9 : Joint de Oldham du bras maxpid

Sur le système Maxpid présent dans le laboratoire de SII, l'axe de sortie du moteur 4 n'est pas parfaitement aligné avec l'axe de la vis 1 qu'il doit entraîner en rotation.

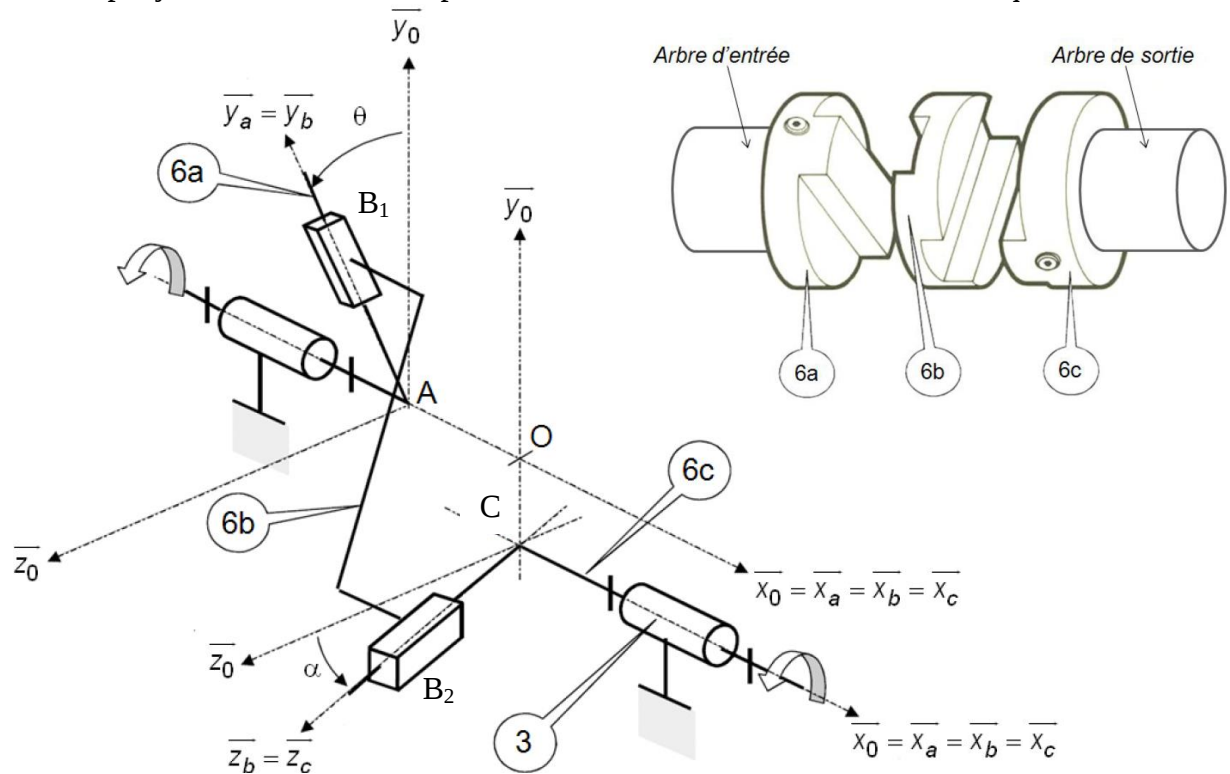
Pour transmettre le mouvement de rotation, le concepteur a choisi d'utiliser un accouplement entre l'axe moteur et la vis de type **joint de Oldham**.

Cette solution technique qui permet de réaliser l'exigence technique « transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres parallèles non coaxiaux », est constituée :

- d'un plateau **6a**, lié par une liaison encastrement à l'arbre d'entrée (axe du moteur 4),
- d'un plateau **6c**, lié par une liaison encastrement à l'arbre de sortie (vis 1),
- d'un élément intermédiaire **6b**.



Cette transmission par joint de Oldham est représentée sous la forme du schéma cinématique ci-dessous.



Constituants et paramétrage :

- Le solide 3, de repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, est considéré comme fixe.
- Le solide 6a, de repère associé $R_a(A, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$, est en mouvement de rotation d'axe $(A, \vec{x}_0)$ par rapport au solide 3 tel que $\vec{x}_0 = \vec{x}_a$ et $(\vec{y}_0, \vec{y}_a) = \theta(t)$.
- Le solide 6c, de repère associé $R_c(C, \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$, est en mouvement de rotation d'axe $(C, \vec{x}_0)$ par rapport au solide 3 tel que $\vec{x}_0 = \vec{x}_c$ et $(\vec{z}_0, \vec{z}_c) = \alpha(t)$.
- Le solide 6b, de repère associé $R_b(B_1, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$

On définit $\vec{OA} = -e.\vec{x}_0$, $\vec{OC} = -f.\vec{y}_0$, $\vec{AB}_1 = \lambda(t).\vec{y}_a$ et $\vec{CB}_2 = \mu(t).\vec{z}_c$

Objectifs : S'assurer que la vitesse de rotation de la vis est la même que la vitesse de rotation de l'axe du moteur (transmission homocinétique). Exprimer les vitesses de glissement dont la connaissance guide le choix des matériaux en contact.

Travail demandé :

1. Repasser en couleur les différents solides sur le schéma cinématique.
2. Dessiner le graphe des liaisons du joint de Oldham. Préciser les caractéristiques de chacune des liaisons.
3. Donner le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du joint de Oldham.
4. Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.
5. Déterminer, à l'aide de la fermeture cinématique ci-dessous, la loi entrée-sortie en vitesse du système.

Fermeture cinématique : $V_{3/3} = V_{3/6a} + V_{6a/6b} + V_{6b/6c} + V_{6c/3} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$. Où $V_{3/6a}$ est le

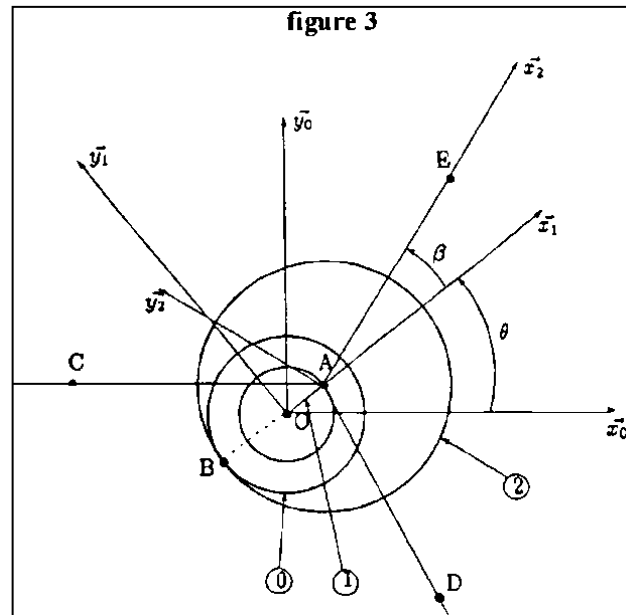
torseur cinématique du mouvement de 3 par rapport à 6a réduit au point A

6. Conclure sur le caractère homocinétique (vitesse d'entrée = vitesse de sortie) de cette transmission de mouvement.

- Le stator est modélisé par un solide indéformable S_0 repéré par $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- L'arbre moteur est modélisé par un solide indéformable S_1 repéré par $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. S_1 est lié à S_0 par une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$; $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ donne l'orientation de R_1 dans R_0 .
- Le rotor est modélisé par un solide indéformable S_2 repéré par $R_2 (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. S_2 est lié à S_1 par une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$; $\vec{OA} = e \vec{x}_1$ et $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ donnent la position et l'orientation de R_2 dans R_1 .

Le rotor S_2 est en contact ponctuel sans glissement en B (voir figure 3) avec le pignon fixe du stator S_0 .

$\vec{OB} = -b \vec{x}_1$ donne la position de B.



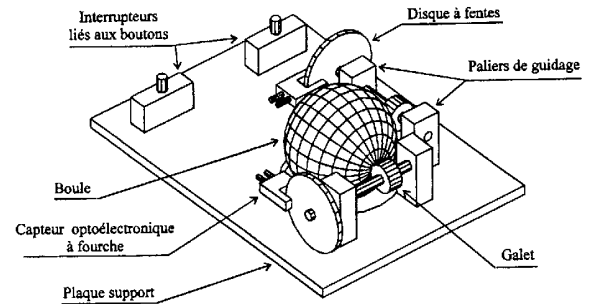
Objectif : L'objet de cette étude est la détermination de l'équation du cylindre épitrochoïde. Sa connaissance est indispensable pour mener à bien l'étape de fabrication des pièces constitutives du moteur Wankel.

Travail demandé :

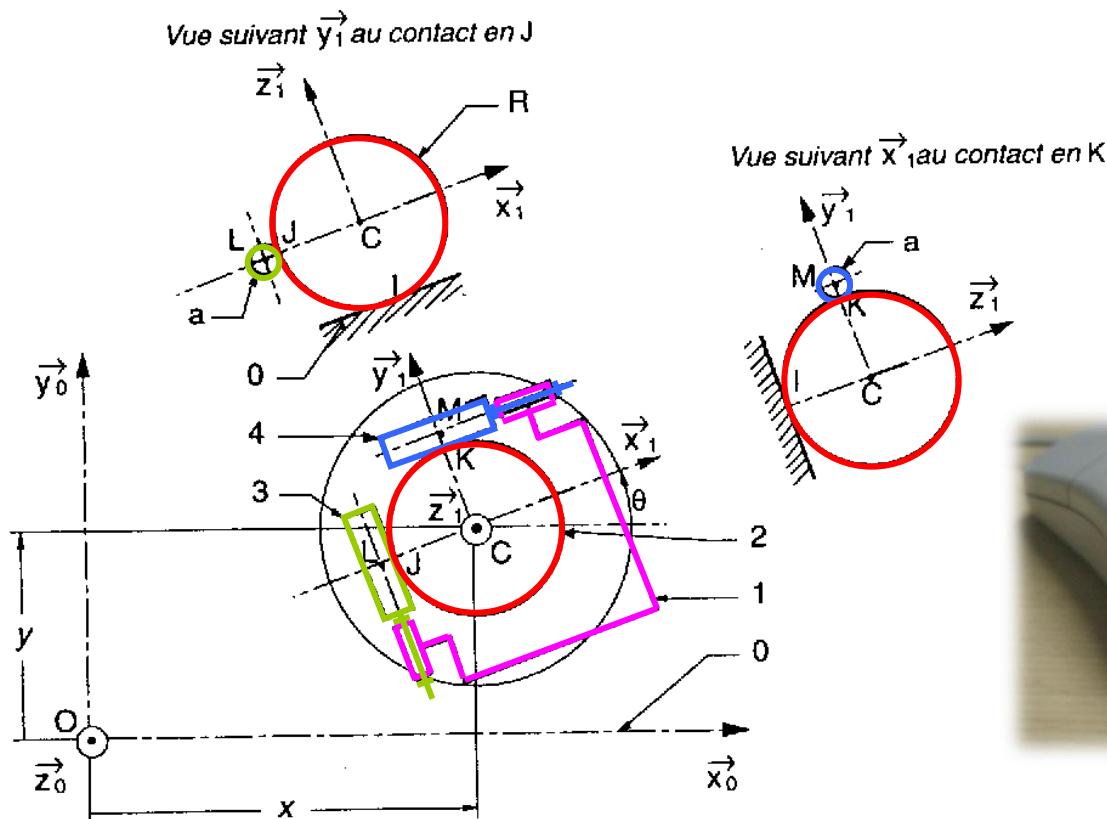
1. Exprimer dans B_1 , la vitesse $\vec{V}_{A2/0}$.
2. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{2/0}$ en fonction de $\dot{\beta}$ et $\dot{\theta}$.
3. Exprimer, dans B_1 , la vitesse $\vec{V}_{B2/0}$.
4. En traduisant la condition de non glissement en B, déterminer la relation $\dot{\beta} = f(e, b, \dot{\theta})$.
5. Les positions angulaires θ_0 et β_0 de l'arbre et du rotor à l'instant $t = 0$ sont choisies telles que $\theta_0 = 0$ et $\beta_0 = 0$. Déterminer la relation $\beta = g(\theta, e, b)$.
6. Soit E, le point du rotor tel que $\vec{AE} = d \vec{x}_2$. Exprimer, dans B_1 , $\vec{V}_{E2/0}$ en fonction de e, d, b, θ et $\dot{\theta}$.
7. Exprimer cette même vitesse dans B_0 .
8. Soient x_E et y_E les coordonnées de E dans R_0 , exprimer x_E et y_E en fonction de e, d, b et $\theta(t)$.
9. On donne $e = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$. Tracer, dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ la trajectoire de E (point de contact du rotor avec le stator) définissant la géométrie du cylindre épitrochoïde.
10. Combien de tours de l'arbre moteur sont nécessaires pour que E repasse par la même position ?

Exercice 11 : Souris mécanique d'ordinateur

Les figures ci-contre montrent la constitution d'une souris pour ordinateur. Les galets 3 et 4 sont en liaison pivot avec le support 1: chaque axe porte un disque à fentes qui tourne en regard d'un capteur optoélectronique. Le capteur et l'électronique associée permettent de transmettre à l'ordinateur la position et la vitesse de la souris. Le repère R_0 est lié au tapis 0 et R_1 à la plaque support 1. Les galets roulent sans glisser en J et K sur la boule 2 qui roule sans glisser en I sur le tapis 0.



Objectif : relier les mouvements de la souris aux mouvements du curseur à l'écran. Les relations traduisent le roulement sans glissement de certains éléments mécaniques entre eux.



Données : La position de 1 par rapport à 0 est définie par $\vec{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$ (R étant le rayon de la boule) et par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. Les galets ont un rayon égal à a . Les vitesses $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont connues.

La liaison de la boule 2 par rapport au cadre 1 est une rotule de centre C.

On note : $\vec{\Omega}(2/1) = p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0$, $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_3\vec{y}_1$ et $\vec{\Omega}(4/1) = \omega_4\vec{x}_1$

Travail demandé :

1. Donner les torseurs cinématiques de 1/0 et de 2/1 en C. En explicitant la condition de non glissement en I, exprimer p et q en fonction des données.
2. Donner le torseur cinématique de 3/1 en L. En explicitant la condition de non glissement en J, exprimer $\vec{\Omega}(3/1)$ et $\vec{\Omega}(2/1)$ en fonction des données.
3. Donner le torseur cinématique de 4/1 en M et déterminer $\vec{\Omega}(4/1)$ en fonction des données.

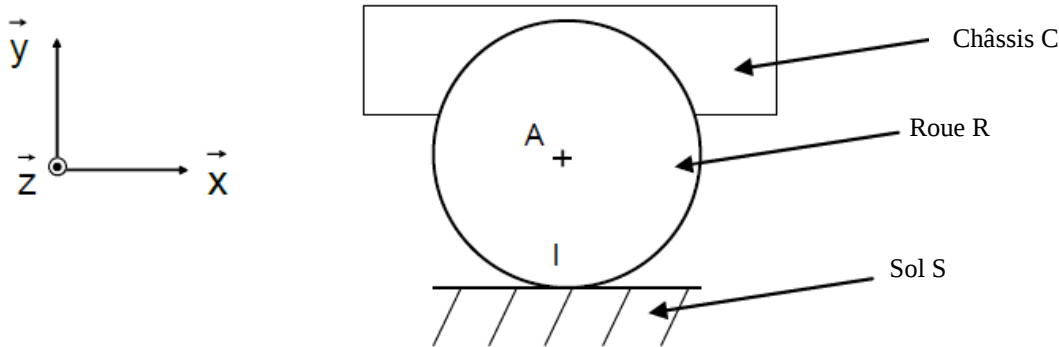
Exercice 12 : Vitesse d'un véhicule

Soit un véhicule quelconque vérifiant 2 hypothèses FONDAMENTALES :

- Le véhicule est en mouvement de translation par rapport au sol.
- On suppose qu'il y ait roulement sans glissement au contact roue/sol.



Schéma simplifié.



Le rayon de la roue est : r

Le point A est le centre de la roue et le point I, le point de contact roue/sol.

La vitesse de translation du châssis/sol est : $\forall P, \text{ on a } \overrightarrow{V}(P \in C/S) = V_{CS} \vec{x}$

La vitesse de rotation de la roue/châssis est : $\overrightarrow{\Omega}_{R/C} = \omega_{RC} \vec{z}$

NB : $\omega_{RC} < 0$ si $V_{CS} > 0$

Travail demandé : Déterminer la relation entre ω_{RC} et V_{CS} répondant aux hypothèses.

Cette relation qui traduit le roulement sans glissement est à retenir.....

Exercice 13 : Banc de test de pneumatiques

Un banc de tests d'usure de pneumatiques est schématisé ci-contre.

Un ensemble pneumatique + jante **2**, entraîné en rotation par rapport au bras **3** à l'aide d'un moto-réducteur, roule sur un plateau tournant **1**.

Le bras **3** est le plateau tournant **1** sont entraîné en rotation par rapport aux bâti **0** à l'aide de deux autres moto-réducteurs.

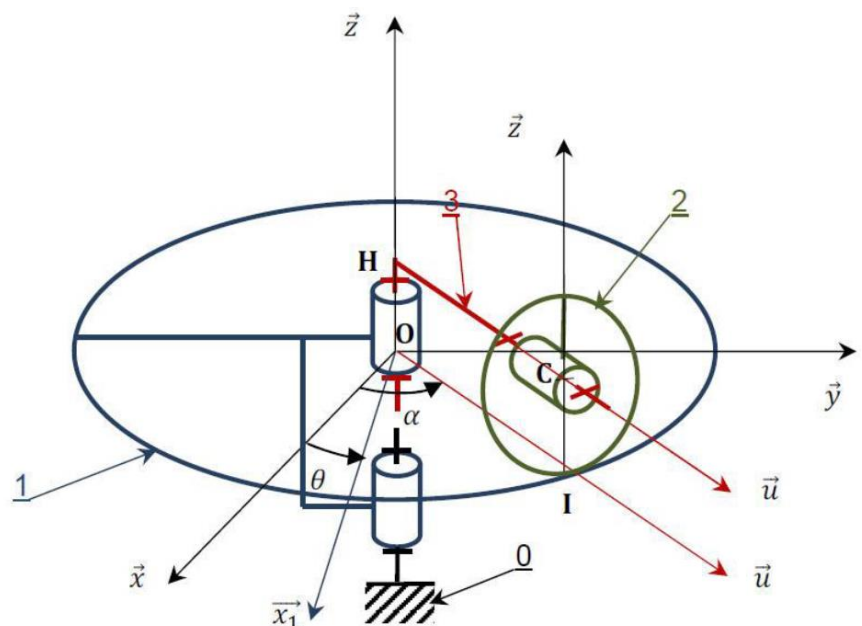


Schéma simplifié :

On considère la roue **2** comme un disque.

Constituants et paramétrage :

- Le bâti 0, de repère associé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est considéré comme fixe.
- Le plateau tournant 1, de repère associé $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$ par rapport au bâti 0 tel que $\vec{z} = \vec{z}_1$ et $(\vec{x}, \vec{x}_1) = \theta(t)$.
- Le bras 3, de repère associé $R_3(H, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, est en mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$ par rapport au bâti 0 tel que $\vec{z} = \vec{w}$ et $(\vec{x}, \vec{u}) = \alpha(t)$.
- L'ensemble pneumatique + jante 2, de repère associé $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est en mouvement de rotation d'axe $(H, \vec{u})$ par rapport au bras 3 tel que $\vec{u} = \vec{x}_2$ et $(\vec{z}, \vec{z}_2) = \beta(t)$. On pose $\overline{HC} = d\vec{u}$ ($d = \text{constante}$). Le pneumatique, de rayon r , est en contact au point I avec le plateau 1.

Objectif : déterminer la relation entre les vitesses de rotation des 3 actionneurs permettant de reproduire des conditions de roulement sans glissement d'un pneumatique sur une route.

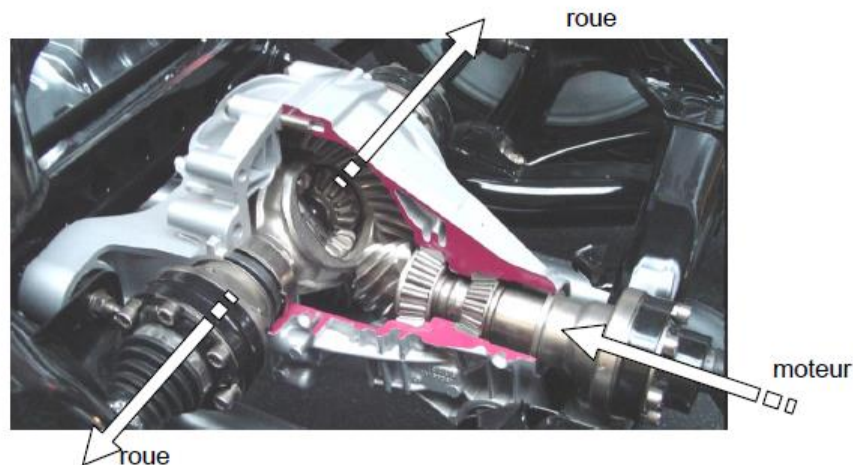
Travail demandé :

1. Quelle condition le vecteur $\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$ doit-il satisfaire pour assurer le maintien du contact entre les solides 2 et 1 au point I ?
2. Déterminer $\overrightarrow{V(H \in 2/1)}$
3. Donner l'expression du vecteur vitesse de glissement au point I en fonction des paramètres.
4. En déduire la relation entre $\dot{\theta}, \dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ (vitesses de rotation des 3 actionneurs) et les dimensions du système, afin que le pneumatique roule sans glisser.
5. En déduire dans ce cas, les composantes du vecteur instantané de rotation de 2/1.
6. Préciser les composantes de roulement et de pivotement en I de ce vecteur.

Exercice 14 : Différentiel automobile

En virage, afin de respecter les conditions de roulement sans glissement des roues par rapport à la route, les roues d'un véhicule ne tournent pas toutes à la même vitesse : la roue intérieure au virage tourne moins vite que la roue extérieure.

Le différentiel permet de rattraper (grâce à la rotation des satellites autour de leur axe) la différence de vitesse des deux roues motrices en virage.



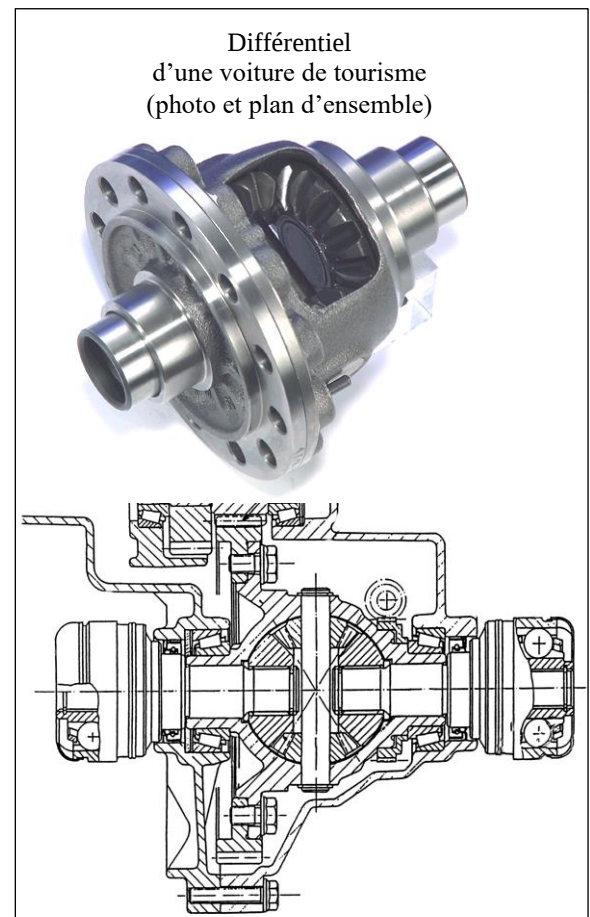
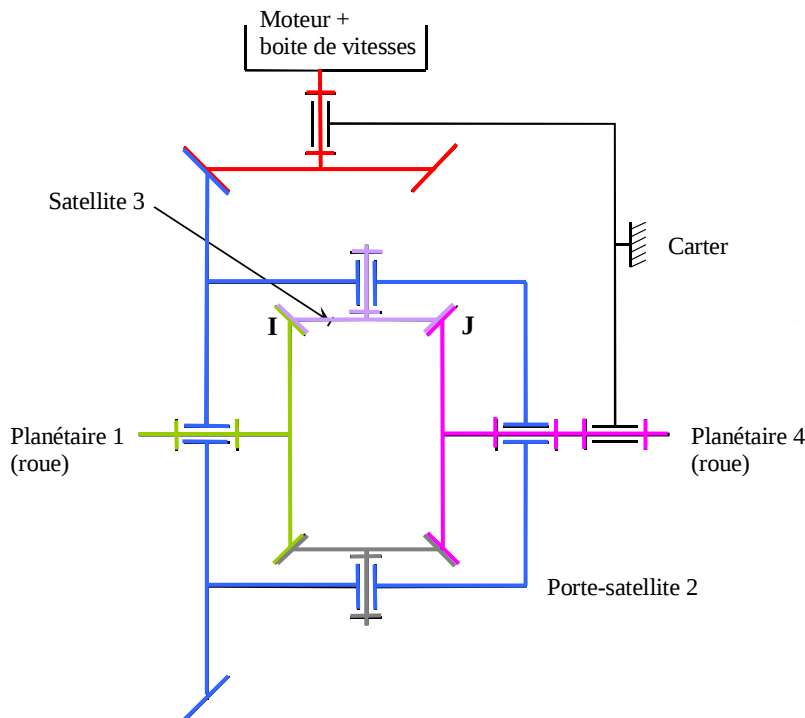
Objectif : valider la loi entrée/sortie de cet organe de transmission indispensable dans un véhicule.

Sur le schéma ci-dessous :

Soit I le point de contact entre le satellite 3 et le planétaire 1.
Soit J le point de contact entre le satellite 3 et le planétaire 4.

On note : $\vec{\Omega}_{1/C} = \omega_{1/C} \vec{\chi}$, $\vec{\Omega}_{4/C} = \omega_{4/C} \vec{\chi}$, $\vec{\Omega}_{2/C} = \omega_{2/C} \vec{\chi}$

Schéma cinématique du différentiel



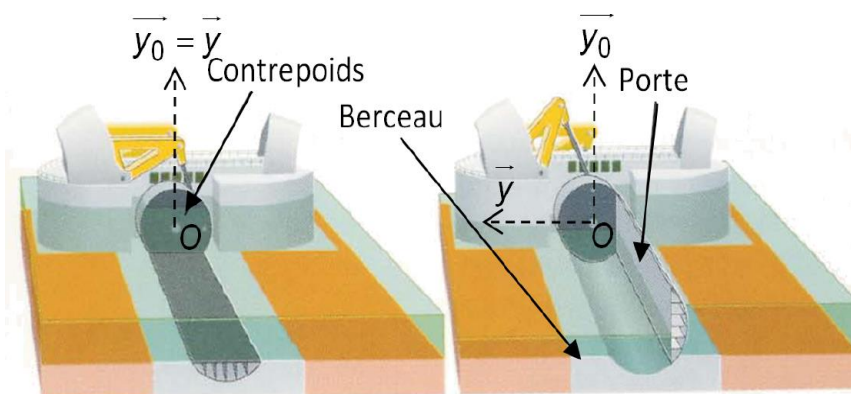
Le différentiel a pour but de répartir la puissance fournie par le moteur aux deux roues motrices du véhicule. Ceci en conservant en permanence le roulement sans glissement de ces roues par rapport à la route. On montre facilement que par rapport à un fonctionnement du véhicule en ligne droite, la diminution de vitesse de rotation de la roue intérieure au virage est égale à l'augmentation de la vitesse de rotation de la roue extérieure au virage.

Travail demandé : en exprimant les conditions de roulement sans glissement en I et J, déterminer la relation entre les vitesses angulaires $\omega_{1/C}$, $\omega_{4/C}$ et $\omega_{2/C}$. Vérifier que cette relation permet la distribution correcte de la puissance motrice dans un véhicule.

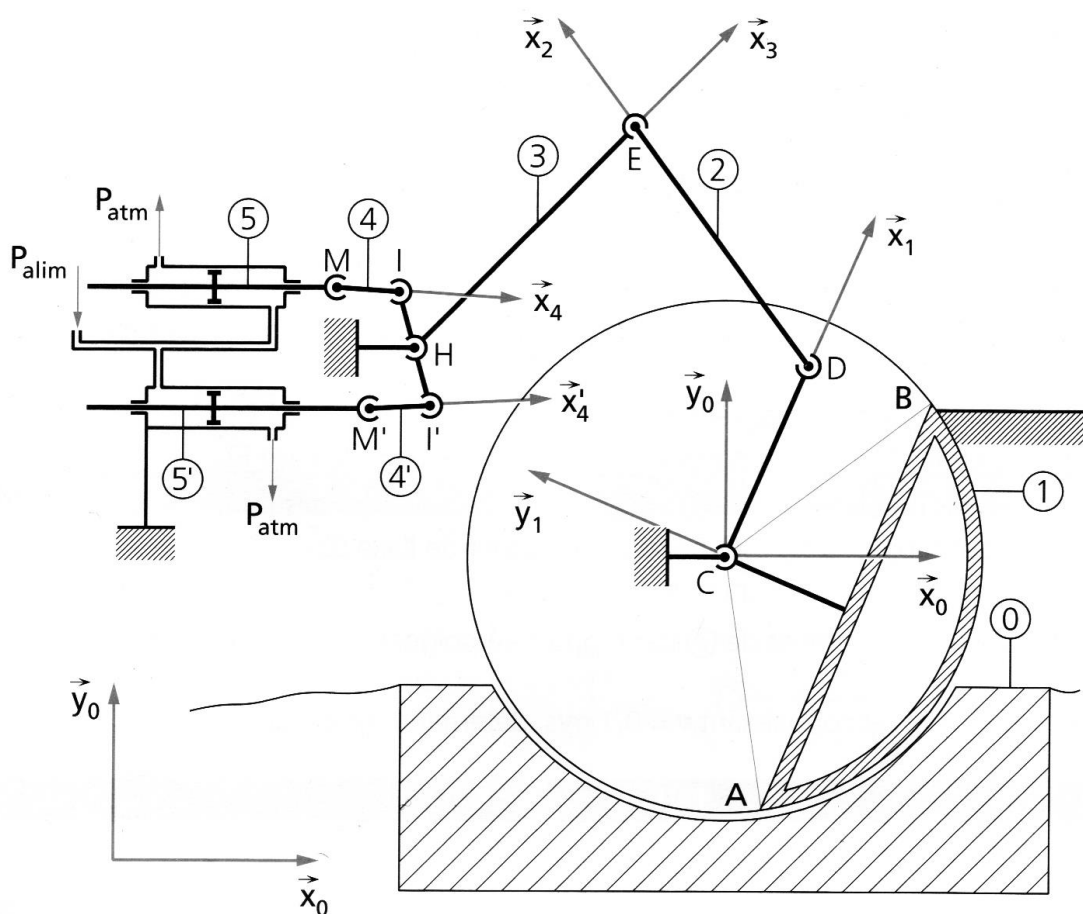
Exercice 15 : Barrage sur la tamise

Le système proposé est une barrière destinée à protéger Londres contre des remontées d'eau de mer lors des grandes marées. En effet, l'ensemble de la région de Londres est soumis à un risque très important d'inondations accentué avec les montées récentes du niveau de la mer dues au réchauffement climatique.

La barrière, mise en place sur la tamise depuis 1982, est longue de 520m et est constituée de 6 portes pivotantes actionnées par des vérins hydrauliques. Au repos, les portes 1 (voir schéma ci-après) de forme circulaire reposent au fond de la tamise. Les plus grandes portes font 61 m de long et 20 m de haut pour une masse de 3700 tonnes. Elles sont capables de supporter des charges de plus de 9000 tonnes.



L'objectif est de calculer la vitesse de rotation des portes connaissant la vitesse de translation des vérins dans la configuration dessinée. Les vérins sont alimentés sous une pression hydraulique P_{alim} .



Les portes **1** de section en forme de secteur circulaire s'effacent totalement dans le berceau **0** en position ouverte et sont verticales en position fermée. Deux vérins **5** et **5'** (l'un travaillant en tirant et l'autre en poussant) sont articulés en **M** et **M'** sur deux bielles **4** et **4'**, elles-mêmes articulées en **I** et **I'** sur un levier de renvoi **3**. Ce levier **3** est articulé en **H** sur le bâti **0** et en **E** sur une bielle **2**. Cette bielle communique son mouvement à la porte **1** articulée en **C** sur le bâti **0**.

On se place en fin de fermeture de la porte et la vitesse de **rentrée** du piston **5** (et donc de sortie du piston **5'**) est de 10 mm/s. On désire déterminer graphiquement la vitesse de fermeture de la porte.

1. Sur l'épure de la figure 1 du document réponse, représenter $\vec{V}(M \in 5/0)$. En déduire $\vec{V}(M \in 4/0)$, $\vec{V}(I \in 3/0)$ et $\vec{V}(E \in 3/0)$. En déduire $\vec{V}(D \in 1/0)$ et $\vec{V}(B \in 1/0)$.
2. Sachant que $CD = 10,25 \text{ m}$, calculer la vitesse de rotation de la porte **1** par rapport au bâti **0**.
3. Sur la figure 2, représenter les pièces **1**, **2**, **3**, **4** et **4'** en fin d'ouverture, c'est-à-dire quand le point **B** est en B_1 . En déduire la course des vérins.

Document réponse exercice 15

Echelle des vitesses: 1 mm représente 1 mm/s.

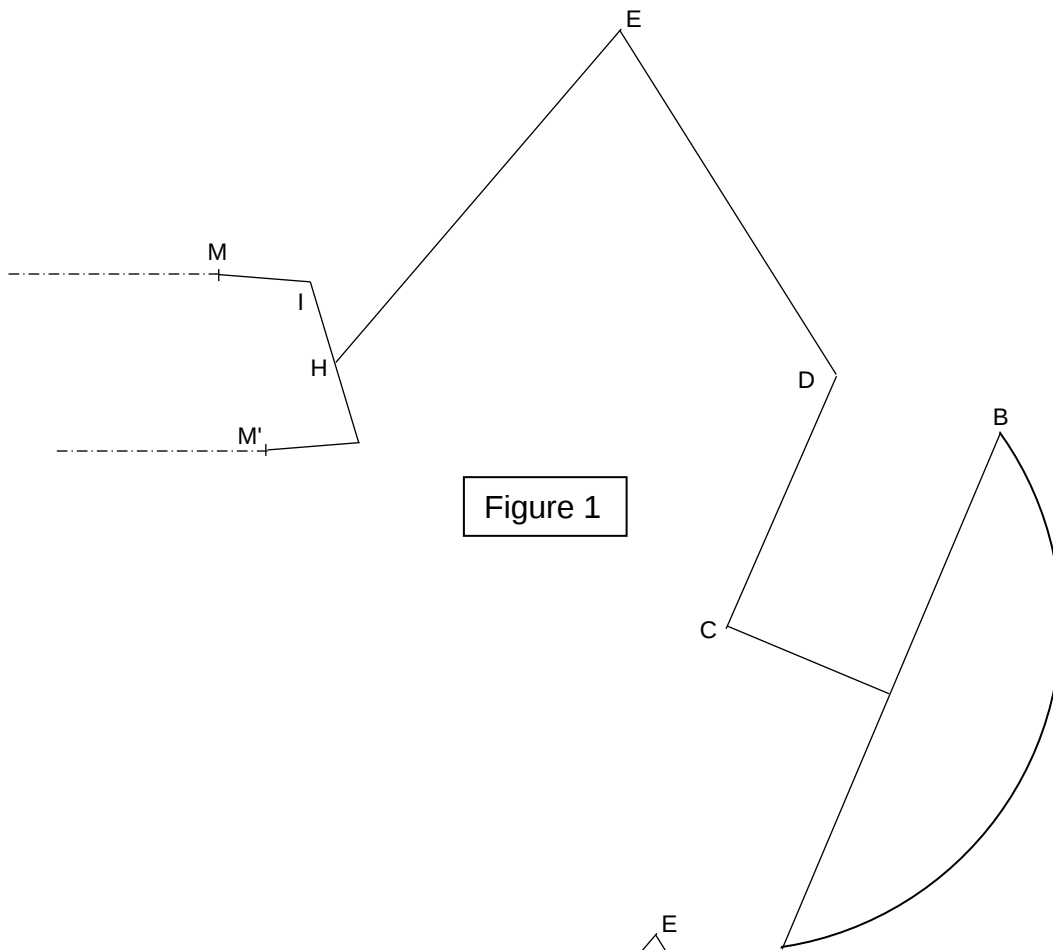


Figure 1

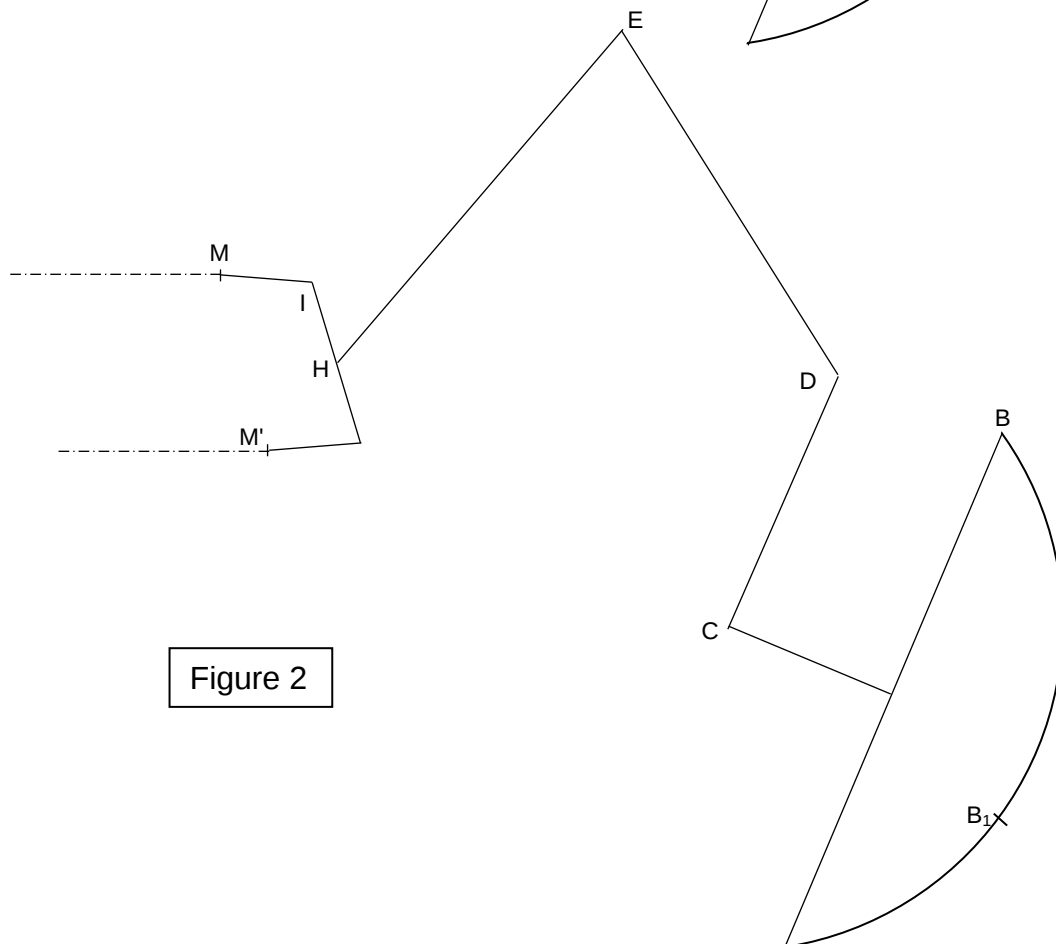


Figure 2