Eléménts de cours sur la dérivation numérique

1 Cours

La dérivation numérique consiste à dériver (de façon approchée) une fonction sur un intervalle borné, c'est-à dire, calculer la pente de la courbe représentant la fonction, à partir d'un calcul en un nombre fini de points.
L'estimation de la dérivée la plus simple consiste à calculer la pente à partir du point courant et du point précédent ou suivant (figure 1). L'estimation de la dérivée au point i peut alors se calculer par :

— différence avant : (pente de la droite Δ^+) :

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

— différence arrière : (pente de la droite Δ^-) :

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

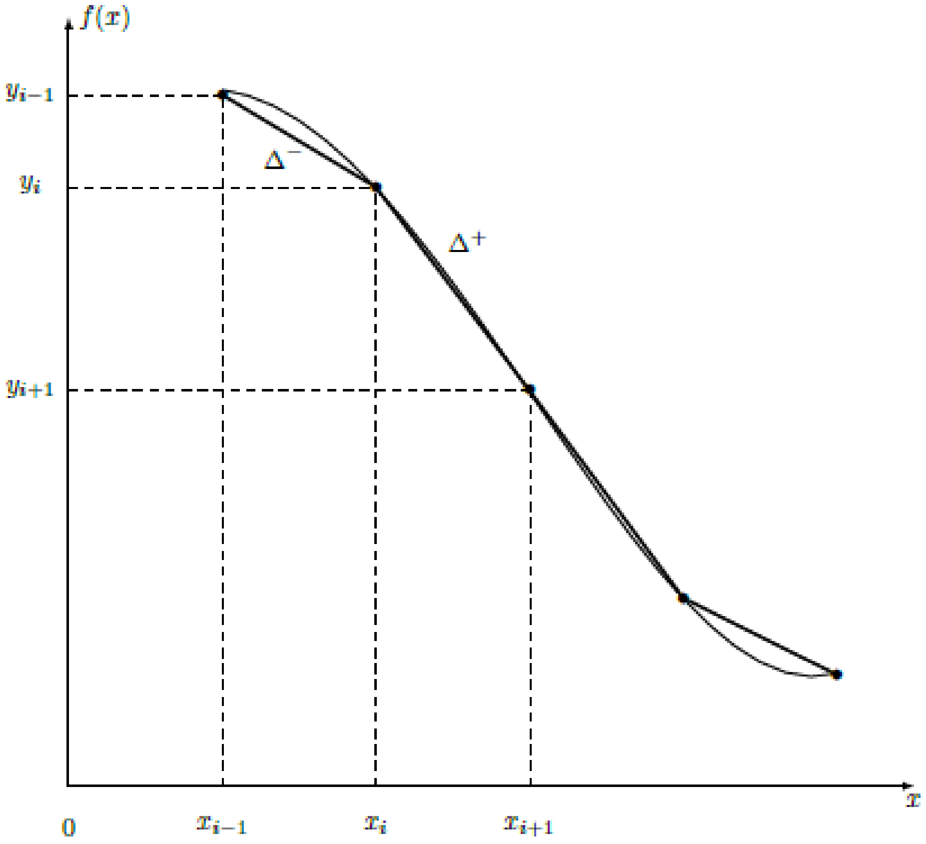

FIGURE 1 – Dérivation à 1 pas.

Évidement, lorsqu'il s'agit de dériver une fonction temporelle "en temps réel", le point suivant n'est pas encore connu donc seule la différence arrière peut être calculée. Notons aussi que le calcul de la dérivée conduit à un

tableau de valeur de dimension $n-1$.
Il existe des méthodes à deux pas (ou plus) utilisant différents points x_i (figure 2).

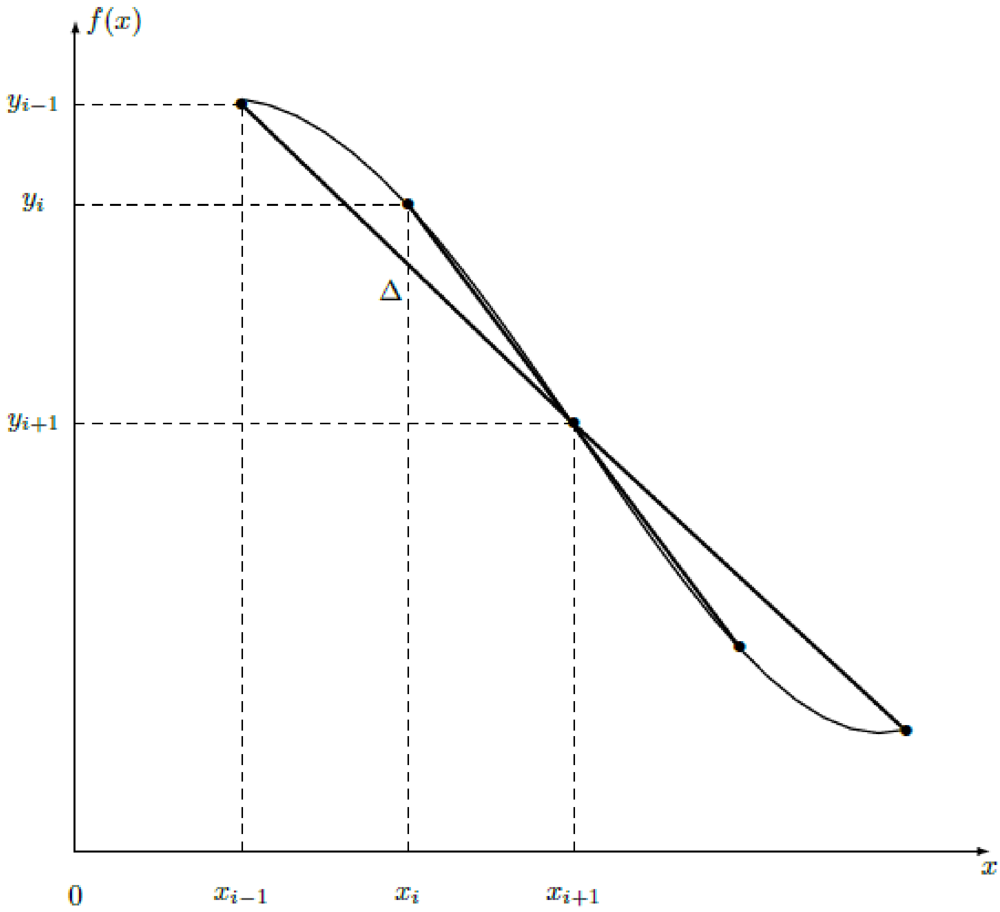

FIGURE 2 – Dérivation à 2 pas.

Influence du bruit

Lorsque la courbe est issue d'une mesure, elle est généralement entachée d'un léger bruit, qui peut devenir catastrophique pour l'évaluation de la dérivée (figure 3). En effet, si les points de mesure restent "en moyenne" au voisinage de la valeur mesurée, il peut exister des fluctuations rapides entre les points successifs. Le calcul de la dérivée conduit à déterminer la pente entre deux points successifs, ce qui perturbe fortement le signal dérivé et cache les évolutions lentes du signal (lentes devant la période d'échantillonnage).

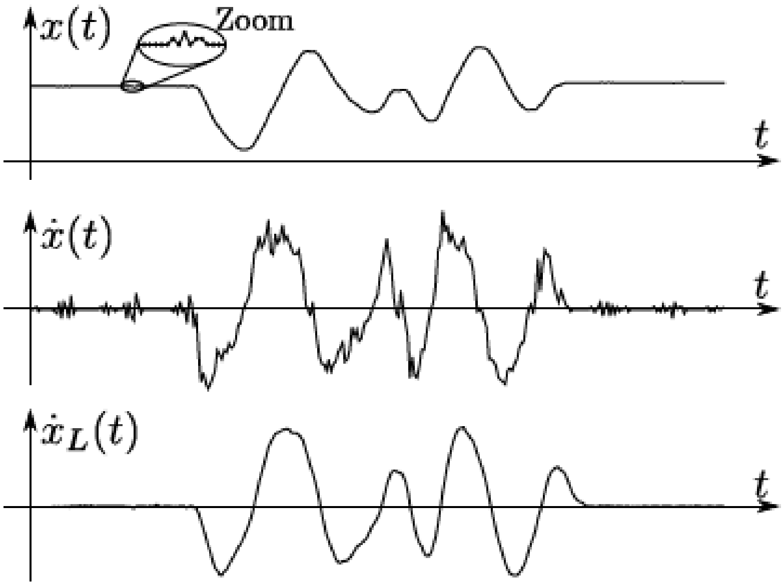

FIGURE 3 – Mesure d'une position au cours du temps $x(t)$, dérivée à 1 pas $\dot{x}(t)$ et dérivée à 1 pas lissée en effectuant la différence sur 10 pas.

Deux solutions sont possibles :

- filtrer (ou lisser) le signal d'origine pour supprimer l'essentiel du bruit, puis dériver;
- calculer la dérivée sur un temps plus long que le temps d'échantillonnage, par exemple pour une méthode à 1 pas en calculant la pente entre deux points plus espacés (solution adoptée pour $\dot{x}_L(t)$).