

Problème 1: Robot de soudage

L'étude suivante porte sur un robot de soudure dont une modélisation est proposée figure 1. Il est constitué de 4 segments (ou solides) articulés entre eux, le premier solide étant articulé sur un solide fixe S0. Ce robot est de type RRRT, où R désigne un mouvement relatif de type rotation entre deux segments consécutifs et T désigne un mouvement relatif de type translation.

- **Le solide S0** appelé base est fixé au sol de l'atelier. Soit $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la base.
- **Le solide S1** appelé fût est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ par rapport à la base S0. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_1 non représenté. Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié au fût.
On pose $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\overrightarrow{O_0O_1} = L_0 \cdot \vec{z}_0$ avec $L_0 = 50$ cm.
- **Le solide S2** appelé bras est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_1, \vec{x}_1)$ par rapport au fût S1. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_2 non représenté. Soit $R_2(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié au bras. On pose $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ et $\overrightarrow{O_1O_2} = L_1 \cdot \vec{y}_2$ avec $L_1 = 70$ cm.
- **Le solide S3** appelé avant-bras est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_2, \vec{x}_1)$ par rapport au bras S2. Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_3 non représenté. Soit $R_3(O_2, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère lié à l'avant-bras. On pose $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ et $\overrightarrow{O_2O_3} = L_2 \cdot \vec{y}_3$ avec $L_2 = 60$ cm.
- **Le solide S4** appelé organe terminal est animé d'un mouvement de translation suivant la direction $\vec{z}_3$ par rapport à l'avant-bras S3. Ce mouvement de translation est assuré par un vérin linéaire V_4 non représenté. Soit $R_4(O_4, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère lié à l'organe terminal. On pose $\overrightarrow{O_3O_4} = -L_3(t) \cdot \vec{z}_3$.



Les mouvements du robot sont étudiés dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la base et supposé galiléen. L'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ est vertical ascendant.

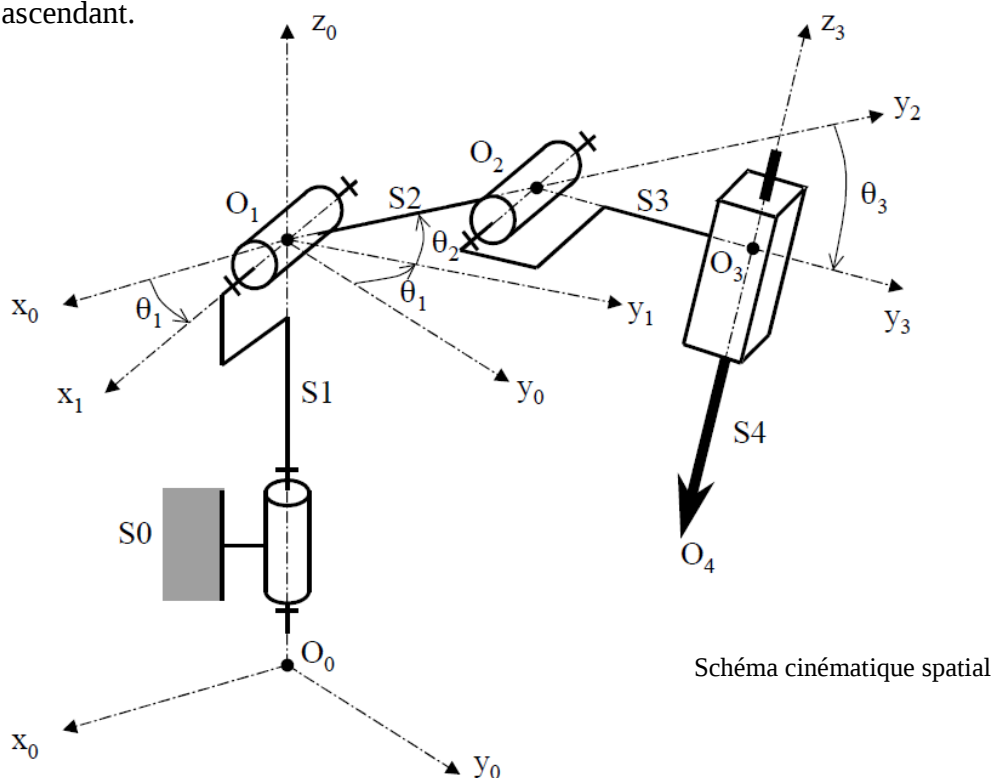


Schéma cinématique spatial

Cahier des charges :

Un cordon de soudure ne doit pas être réalisé à une vitesse supérieure à 5cm/s.

Caractéristiques du vérin :

Vitesse maximale : 0,1m/s.

Accélération maximale : 1m/s^2 .

Caractéristiques des moteurs (après réduction) :

Vitesse de rotation maximale : 0,03rad/s.

Accélération angulaire maximale : 1rad/s^2 .

Etude cinématique

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement à la caractérisation de la position de l'organe terminal en fonction des variables articulaires ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, L_3$) ainsi qu'à la commande des axes pour accomplir une tâche donnée, c'est-à-dire pour réaliser le déplacement d'une pièce suivant une trajectoire donnée.

Questions et travail demandé :

1. Mettre en place les 3 figures de projection relatives aux rotations ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$).
2. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(O_4 \in S_4 / S_0)$, exprimé dans la base du repère R_3 en fonction des vitesses angulaires $\dot{\theta}_i$, de la vitesse de translation $\dot{L}_3(t)$ et des paramètres géométriques L_i .

Déplacement horizontal de l'axe terminal

On souhaite réaliser un cordon de soudure d'axe $(O_0, \vec{y}_0)$. Il est nécessaire, pour que le cordon de soudure soit correctement réalisé, que l'angle $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ soit constant et que $\vec{V}(O_4 \in S_4 / S_0) = V\vec{y}_0$ avec $V = \text{cste}$.

Questions et travail demandé :

3. Caractériser le mouvement du solide 4 par rapport à 0.
4. Quelles conditions la réalisation de ce cordon implique-t-elle sur les paramètres angulaires θ_i ?
5. Par projection dans la base du repère R_0 , en déduire deux relations scalaires liant les paramètres angulaires θ_i , leurs dérivées et L_3 à α et V .
6. Pour $\alpha = 0$, déterminer la vitesse maximale V . Conclure par rapport au cahier des charges.

Problème 2 : Houlogénératrice (inspiré de Centrale TSI 11)**1. Présentation :**

L'énergie solaire est à l'origine de la formation de la houle qui représente une énergie nette disponible évaluée entre 140 et 700 TWh.an⁻¹ d'après le WEC (World Energy council), soit 1 à 5% de la demande mondiale en électricité. La puissance moyenne par mètre de front de vague se situe entre 10 et 100 kW.m⁻¹.

Même si cette ressource reste limitée face à la demande globale en énergie, elle n'en reste pas moins exploitable, particulièrement en France où la façade maritime est l'une des plus importante d'Europe. C'est pourquoi les laboratoires de recherche de l'Ecole Centrale de Nantes, et de l'Ecole Normale Supérieure de Rennes travaillent actuellement au développement d'un prototype de houlogénératrice (projet SEAREV).

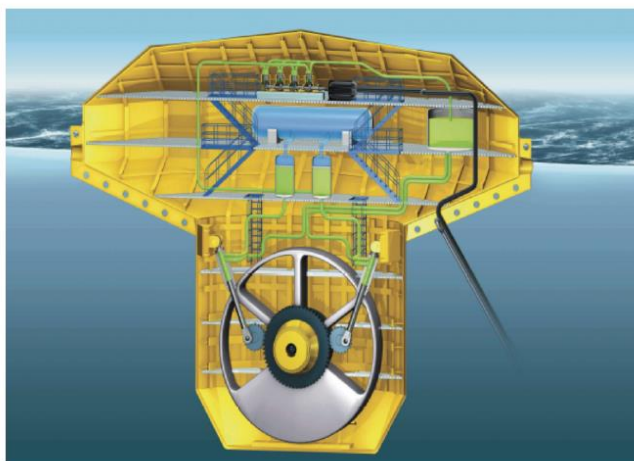


Figure 1 : Prototype et image de synthèse du système SEAREV (à droite)

Il s'agit d'un flotteur ancré au large dans lequel est placé un pendule constituant le rotor d'une génératrice synchrone. L'énergie produite est adaptée afin d'être acheminée à la côte et injectée sur le réseau de transport EDF.

Ce sujet porte sur l'étude de la fonction de service globale de la houlogénératrice : "Convertir l'énergie mécanique fournie par la houle".

Cette fonction est réalisée par un mécanisme utilisant une roue à inertie, entraînée par le mouvement du SEAREV lié à la houle. Celle-ci effectue donc un mouvement de balancier, grâce à un balourd installé sur la roue, qui permet de créer une énergie mécanique de rotation en décalant les oscillations du SEAREV et celles de la roue à inertie. Cette énergie est transmise par l'intermédiaire de deux pignons à deux vérins hydrauliques, qui transforment l'énergie mécanique en énergie hydraulique. Celle-ci est alors utilisée afin d'actionner une génératrice asynchrone qui produit l'électricité. Un schéma du système mécanique de transformation de l'énergie est donné figure ci-contre.

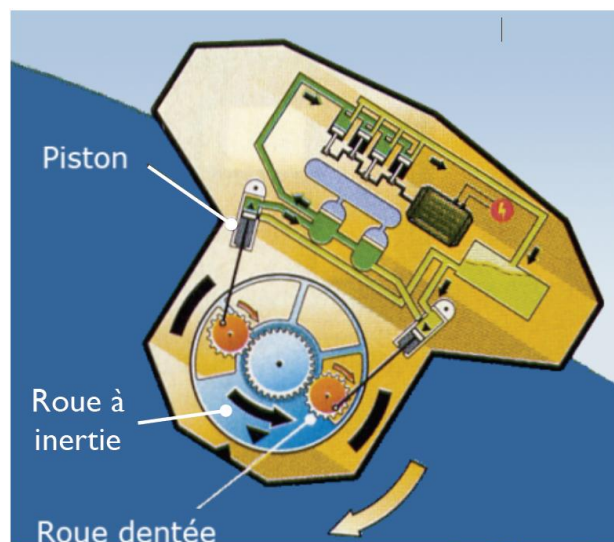


Figure 2 : Système de conversion d'énergie

Le fonctionnement de la roue à inertie est complexe : en effet, si le mouvement de cette roue est laissé libre, elle tend à équilibrer le mouvement du flotteur en s'opposant à la houle. Ceci provoque alors une perte importante d'énergie récupérable par le système. L'une des innovations de ce système est donc un frein, qui permet de maîtriser les mouvements de la roue à inertie et d'adapter le système à l'excitation provoquée par les vagues. Ainsi, le SEAREV garde une oscillation constante adaptée aux vagues, optimisant ainsi le rendement de l'installation.

Objectif : étudier le fonctionnement du système de conversion d'énergie afin d'en déduire les performances énergétiques. Pour cela, l'étude se fera en deux parties distinctes : la première sur l'énergie récupérable par le flotteur et la roue à inertie, et la seconde sur le fonctionnement du système de conversion d'énergie, qui permet de transformer l'énergie mécanique produite en énergie hydraulique permettant d'alimenter la génératrice.

Un extrait du cahier des charges du système de conversion de l'énergie mécanique est donné dans le tableau 1 ci-dessous :

Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
Convertir l'énergie mécanique	Fréquence d'oscillation	$[0,1 ; 1\text{Hz}]$	aucune
	Amplitude des oscillations	$\pm 45^\circ$	$\pm 10^\circ$
	Masse de l'installation	500kg max	aucune
	Encombrement maximal	$1,5\text{m} \times 2\text{m} \times 0,7\text{m}$	aucune
	Durée de vie avant entretien	15 ans	$\pm 2\text{ans}$
	Puissance nominale	10kW	$\pm 5\%$

Figure 3 : Extrait du cahier des charges de l'installation de conversion d'énergie

2. Détermination de l'énergie récupérable par le flotteur

2.1.Description :

Toute l'étude se fera en considérant un système plan ; la surface de l'eau est modélisée par une sinusoïde fonction de l'espace et du temps, tous les mouvements ont lieu dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On fait l'hypothèse forte que l'orientation du flotteur reste tangent à la surface de l'eau, ce qui induit un mouvement de tangage (voir figure 4).

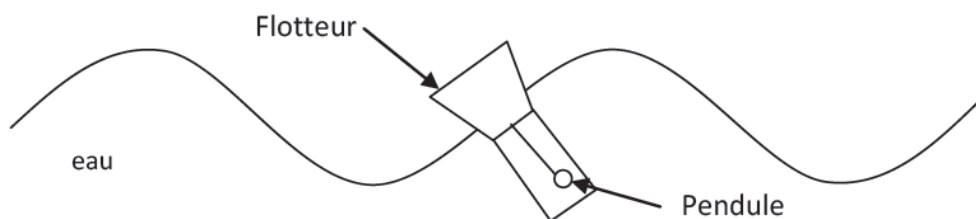


Figure 4 : Modélisation de la houle

La houlogénératrice est constituée d'un flotteur **1** et d'un pendule **2** évoluant par rapport à la terre **0** (figures 5 et 6). Les deux solides **1** et **2** sont en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$.

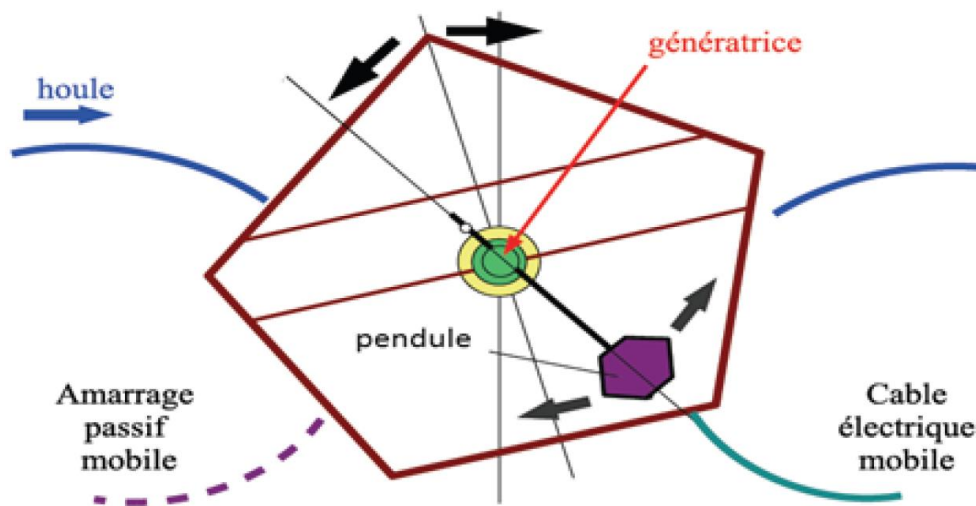


Figure 5 : Principe de fonctionnement de la houlogénératrice

2.1.1.Paramétrage :

Le point O, origine du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ est fixe par rapport à la terre et à altitude nulle. Le vecteur $\vec{x}_0$ a pour direction la verticale, le vecteur $\vec{y}_0$ a pour direction l'horizontale. La base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est liée au flotteur **1** et la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est liée au pendule **2**. Le mouvement de tangage du flotteur induit par la houle se traduit ici par une rotation du flotteur **1** par rapport à la terre **0** autour de l'axe $(O, \vec{z})$. Le paramètre angulaire est l'angle α . L'axe de la liaison pivot entre le flotteur **1** et le pendule **2** est l'axe $(A, \vec{z})$, le point A est paramétré par $\vec{OA} = d \vec{x}_1$. Le paramètre angulaire est l'angle θ . Le centre d'inertie du pendule **2** est le point G tel que $\vec{AG} = L \vec{x}_2$.

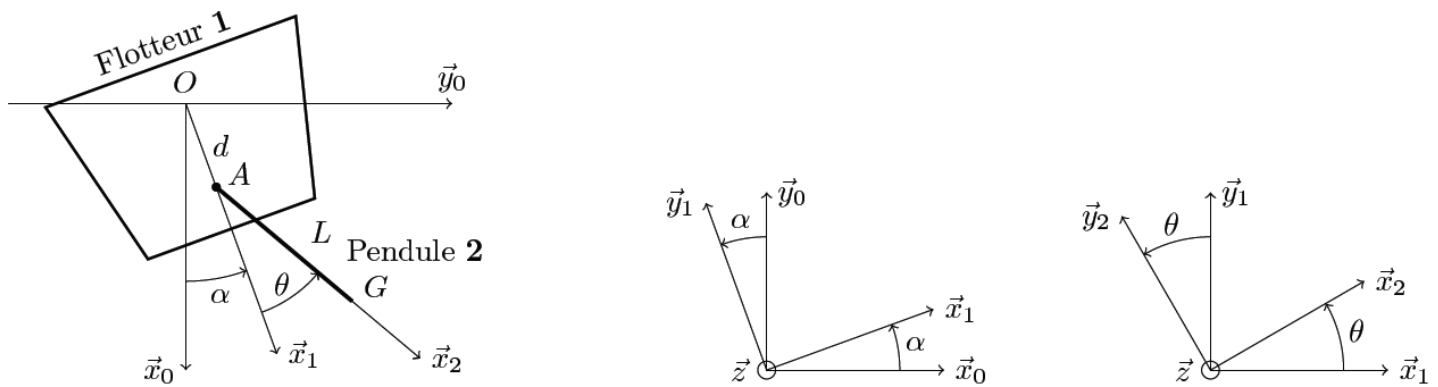


Figure 6 : Paramétrage

2.1.2. Hypothèses :

- Un référentiel lié à la terre est supposé Galiléen ;
- le flotteur est toujours à la surface de l'eau ;
- le flotteur est toujours incliné suivant la tangente à la surface de l'eau. On en déduit une variation de α donnée par $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ en ayant noté t le temps, ω la pulsation de la houle et α_0 l'amplitude angulaire du mouvement de tangage du flotteur ;
- le couple que la génératrice applique sur le pendule 2 est de la forme $\vec{C}_r = C_r \vec{z} = -\lambda \dot{\theta} \vec{z}$
- l'ensemble flottant est soumis à l'action de la pesanteur et à l'action de l'eau.

2.2. Equations de mouvement :

Q1. Déterminer la vitesse du point A du flotteur 1 dans son mouvement par rapport à la terre 0 : $\overrightarrow{V(A \in 1/0)}$

Q2. Déterminer la vitesse du point G du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la terre 0 : $\overrightarrow{V(G \in 2/0)}$

Q3. Déterminer l'expression du moment cinétique du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la terre 0 au point A noté $\overrightarrow{\sigma_{(A,2/0)}}$ déterminé par :

$$\overrightarrow{\sigma_{(A,2/0)}} = J \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + m_2 \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/0)}$$

où J est une constante appelée moment d'inertie du pendule 2 autour de l'axe $(A, \vec{z})$ ($J = 20 \text{ kg.m}^2$) et m_2 est la masse du pendule 2 ($m_2 = 40 \text{ kg}$).

Q4. Déterminer l'expression du moment dynamique du pendule 2 dans son mouvement par rapport à la terre 0 au point A noté $\overrightarrow{\delta_{(A,2/0)}}$ déterminé par :

$$\overrightarrow{\delta_{(A,2/0)}} = \frac{d \overrightarrow{\sigma_{(A,2/0)}}}{dt_0} + m_2 \overrightarrow{V(A \in 1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G \in 2/0)}$$

Pour déterminer l'équation de mouvement du pendule 2, il est nécessaire d'appliquer le théorème du moment dynamique au pendule 2 au point A, selon l'axe $\vec{z}$ dans le référentiel lié à la terre 0. Cette équation s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta_{(A,2/0)}} \cdot \vec{z} = \underbrace{(\overrightarrow{AG} \wedge m_2 \vec{g}) \cdot \vec{z}}_{\text{Moment exercé par le poids}} - \underbrace{\lambda \dot{\theta} \vec{z} \cdot \vec{z}}_{\text{Moment exercé par la génératrice}}$$

avec $\vec{g}$ le vecteur accélération de pesanteur.

Q5. Remplacer les termes de l'équation du moment dynamique ci-dessus et en déduire la relation entre les paramètres : $\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta, \alpha, m_2, g, \lambda, J$ et L .

Il est alors possible de linéariser cette équation en négligeant les termes d'ordre 2 et en considérant les angles α et θ petits. On en déduit alors la relation suivante appelée équation de mouvement :

$$J\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + m_2gL\theta = -(J + m_2dL)\ddot{\alpha} - m_2gL\alpha$$

La puissance récupérer par la génératrice s'écrit $P = \lambda\dot{\theta}^2$. Son expression passe par la résolution de l'équation différentielle précédente.

On cherche à maximiser la puissance récupérée par la génératrice. Pour cela, il est nécessaire d'avoir l'amplitude d'oscillation du pendule 2 par rapport au flotteur 1 la plus grande possible. La courbe suivante représente l'évolution de la puissance moyenne récupérée (pour des périodes de houle comprises entre 4 et 16s) en fonction du paramètre λ .

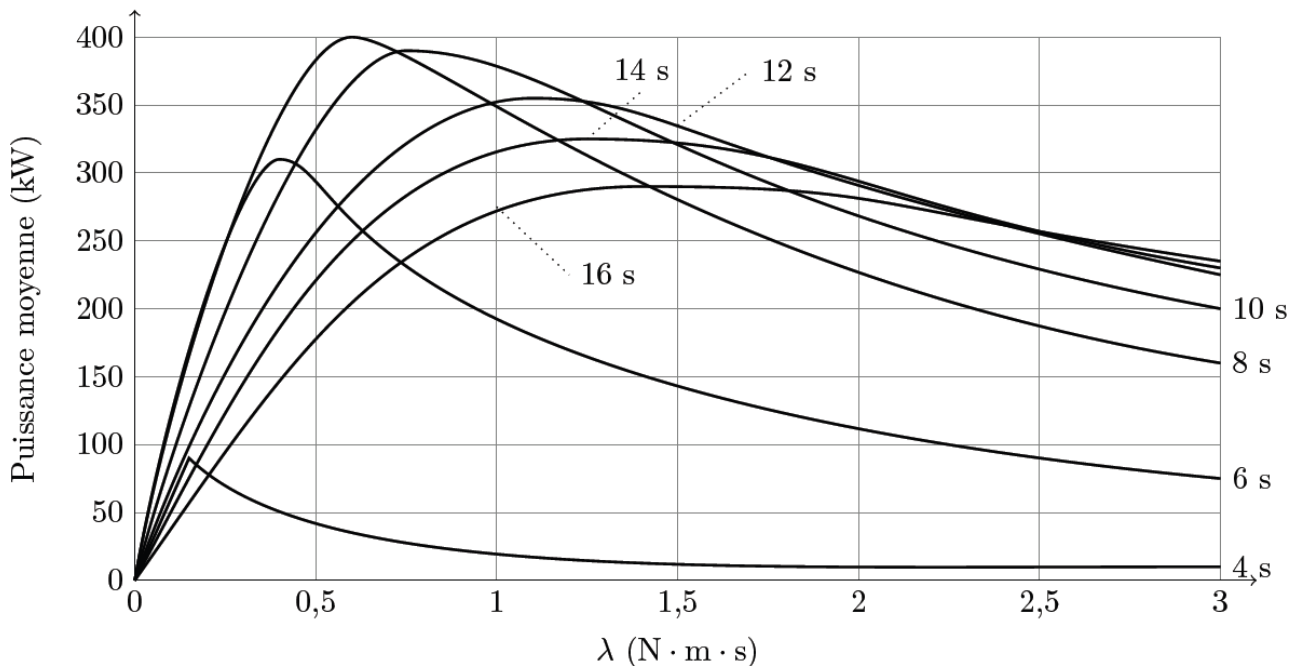


Figure 7 : Evolution de la puissance moyenne récupérée en fonction du paramètre λ (pour des périodes de houle comprises entre 4 et 16s)

Q6. Déterminer grâce à la figure 7 une valeur approchée de la puissance maximale récupérable par la génératrice. Déterminer la valeur du paramètre λ correspondant ainsi que la période de la houle correspondante.

3. Conversion de l'énergie mécanique en énergie hydraulique

L'objectif de cette partie est d'étudier la transmission de puissance entre le pendule 2 (qui est une roue à inertie dans le système réel), et le générateur électrique. Celle-ci se faisant par l'intermédiaire de deux systèmes semblables en parallèle, nous focaliserons cette étude sur un seul de ces deux convertisseurs.

3.1.Description

Le système de conversion d'énergie est présenté au début de ce sujet. Il est composé de la roue à inertie 1 associée au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec la coque du SEAREV notée 0 associée au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, qui crée le mouvement grâce à la houle. Deux systèmes semblables ont alors pour fonction de convertir l'énergie de rotation en énergie hydraulique.

Nous étudions dans cette partie celui composé des éléments suivants (voir schéma figure 8) :

- Une roue dentée, notée 2 associée au repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec la coque sur SEAREV notée 0, et en liaison engrenage (contact ponctuel) avec la roue à inertie 1 en I.
- Un vérin constitué d'une tige 3 et d'un corps 4, en liaison pivot glissant d'axe $\vec{y}_4$ l'un par rapport à l'autre, 3 étant en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec 2 et 4 étant en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ avec 0.

On pose : $\overrightarrow{OI} = r_1 \overrightarrow{y_0}$; $\overrightarrow{AI} = -r_2 \overrightarrow{y_0}$; $\overrightarrow{AB} = b \overrightarrow{y_2}$; $\overrightarrow{BC} = L_v(t) \overrightarrow{y_4}$; $\overrightarrow{OC} = c \overrightarrow{y_0}$

$$\theta(t) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) ; \beta(t) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}) ; \gamma(t) = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_4})$$

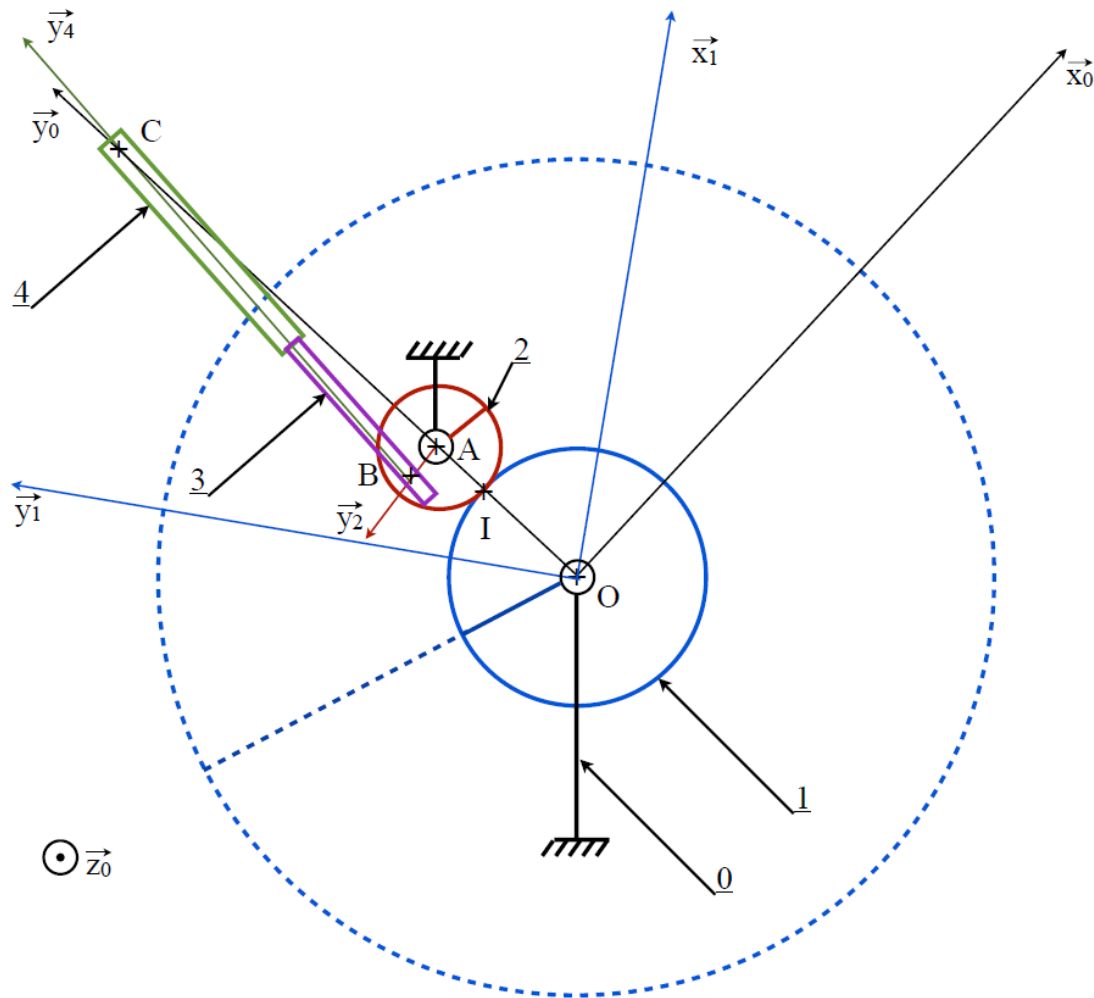


Figure 8 : Schéma du système de conversion d'énergie

3.2. Puissance transmissible

Q7. Faire les figures de projections associées aux angles θ , β et γ .

On suppose que les roues dentées **1** et **2** roulent sans glisser l'une sur l'autre au point I.

Q8. Déterminer les vitesses : $\overrightarrow{V(I \in 1/0)}$ et $\overrightarrow{V(I \in 2/0)}$.

Q9. En déduire une relation entre les paramètres $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$.

Q10. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de 2 par rapport à 0 $\{V_{2/0}\}$ en A, puis en B.

En déduire le torseur $\{V_{3/0}\}$ en B.

Q11. justifier la forme du torseur cinématique $\{V_{4/3}\}$ associé à la liaison pivot glissant entre 3 et 4 en C dans la

$$base\ B_4 : \{V_{4/3}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \omega_{4/3} & v_{4/3} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{C, B_4}$$

Q12. En déduire l'expression de $\{V_{4/3}\}$ en B dans la base B_4 , puis la norme de $\overrightarrow{V(B \in 4/3)}$ en fonction de

$$b, \gamma, \beta, \dot{\gamma} \text{ et } \dot{\beta}.$$

La puissance transmissible atteint son maximum lorsque la vitesse de rentrée de la tige du vérin **3** est maximale. Il est donc nécessaire de se placer dans un point de fonctionnement autour de la position particulière permettant de maximiser la vitesse de translation du vérin.

On s'intéresse au schéma cinématique partiel figure 9 qui représente l'ensemble $\{0, 2, 3, 4\}$ représenté dans une position différente de celle de la figure 8.

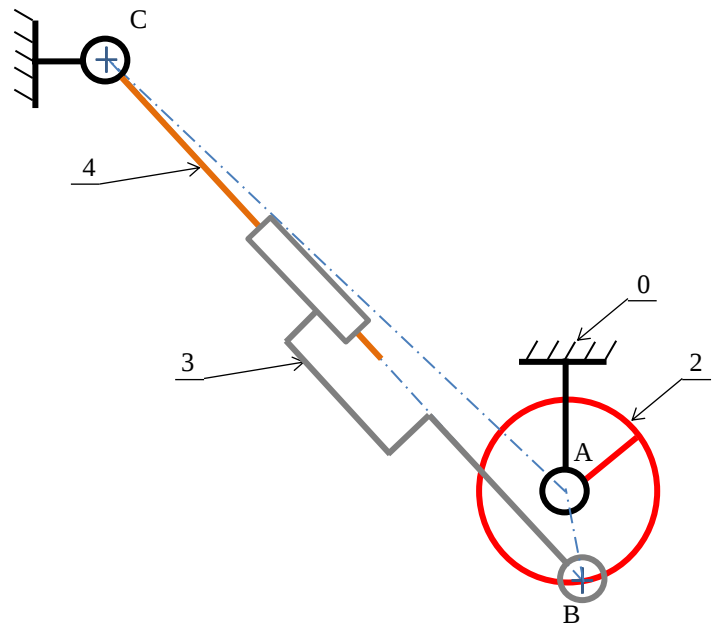


Figure 9 : Schéma cinématique partiel

- Q13.** Représenter graphiquement sur la figure du document réponses, le vecteur $\overrightarrow{V(B \in 2/0)}$. Sa longueur sera de 5 cm et on suppose que la rotation de 2/0 s'effectue dans le sens horaire.
- Q14.** Donner en les justifiant les directions des vecteurs : $\overrightarrow{V(B \in 4/0)}$ et $\overrightarrow{V(B \in 3/4)}$.
- Q15.** En utilisant la décomposition suivante : $\overrightarrow{V(B \in 3/4)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{V(B \in 2/0)} - \overrightarrow{V(B \in 4/0)}$ représenter les différents vecteurs sur le document réponses.
- Q16.** Justifier alors que la vitesse de translation du vérin est maximale dans une position proche de celle représentée figure 8.

Cette position particulière maximisant $\overrightarrow{V(B \in 4/3)}$ correspond à :

$$(\vec{y}_2, \vec{y}_4) = (\vec{y}_2, \vec{y}_0) + (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = -\beta(t) + \gamma(t) = -\frac{\pi}{2}.$$

On se place dans la suite dans cette position particulière du mécanisme.

- Q17.** Exprimer dans la base B_0 , la fermeture géométrique de l'ensemble constitué des pièces 2,3,4 :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}.$$

Retrouver l'expression de l'angle β_0 permettant de maximiser la puissance transmise par le vérin :

$$\beta_0 = \arccos \left[\frac{b}{c - r_1 - r_2} \right]$$

Afin de ne pas perturber le fonctionnement du système, il est important que le vérin reste orienté de manière constante par rapport à la roue dentée 2 ; l'angle γ doit donc rester négatif lors du mouvement du SEAREV. Afin de respecter le cahier des charges, l'angle γ doit donc rester négatif pour une variation de θ de 90° .

- Q18.** En utilisant le résultat de la question 9, déterminer la variation de l'angle β , notée $\Delta\beta$, pour une variation de θ de $\Delta\theta = 90^\circ$.

Comme le fonctionnement de l'angle β doit se faire autour de la valeur β_0 , la variation angulaire de β ne peut excéder $2\beta_0$ si l'on souhaite que γ reste négatif.

- Q19.** Dans le respect du cahier des charges, déterminer la relation entre r_1 et r_2 permettant d'avoir un déplacement angulaire de 2 de $2\beta_0$ pour un déplacement angulaire de 1 de 90° .

On souhaite maintenant connaître l'amplitude du déplacement du vérin pour $\Delta\beta = 2\beta_0$ afin de déterminer l'énergie transmissible par le système.

Q20. En reprenant les équations établies à la question 13, retrouver l'expression de L_v en fonction de β suivante :

$$L_v = \sqrt{(b\cos\beta + c - r_1 - r_2)^2 + (b\sin\beta)^2}$$

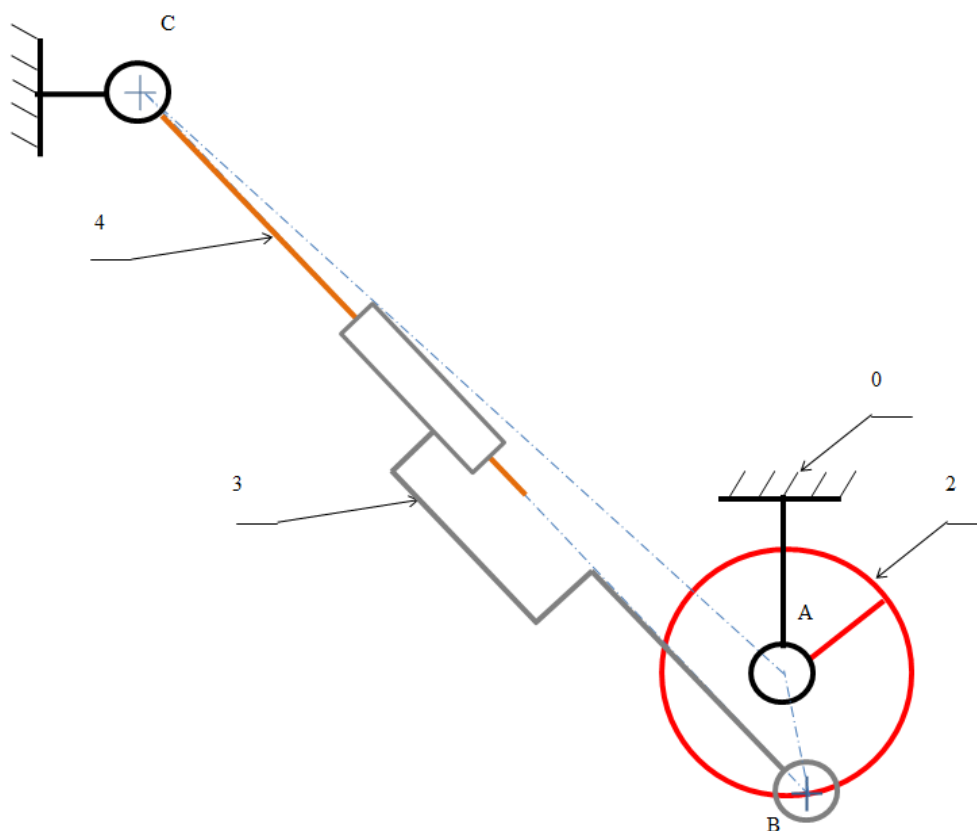
Q21. L_v^{min} étant la valeur minimale de la longueur L_v obtenue pour $\beta = 0^\circ$, déterminer l'expression de L_v^{max} , la longueur maximale du vérin obtenue pour $\beta = 2\beta_0$. En déduire l'expression de l'amplitude du déplacement du vérin ΔL_v .

L'effort maximal transmissible par le vérin (on suppose cet effort constant au cours du mouvement) permettant de fournir une énergie ΔE en une oscillation du système est : $F = \frac{\Delta E}{\Delta L_v}$.

Q22. Comment doit-on agir sur le paramètre b pour diminuer cet effort sans diminuer l'énergie fournie ΔE ?

Q23. On donne les dimensions suivantes : $r_1 = 10\text{cm}$; $r_2 = 15\text{cm}$; $c = 70\text{cm}$; $b = 8\text{cm}$. En déduire la valeur en Newton de l'effort à transmettre par le vérin pour satisfaire le cahier des charges pour une fréquence d'oscillation de 1 Hz.

Document réponse



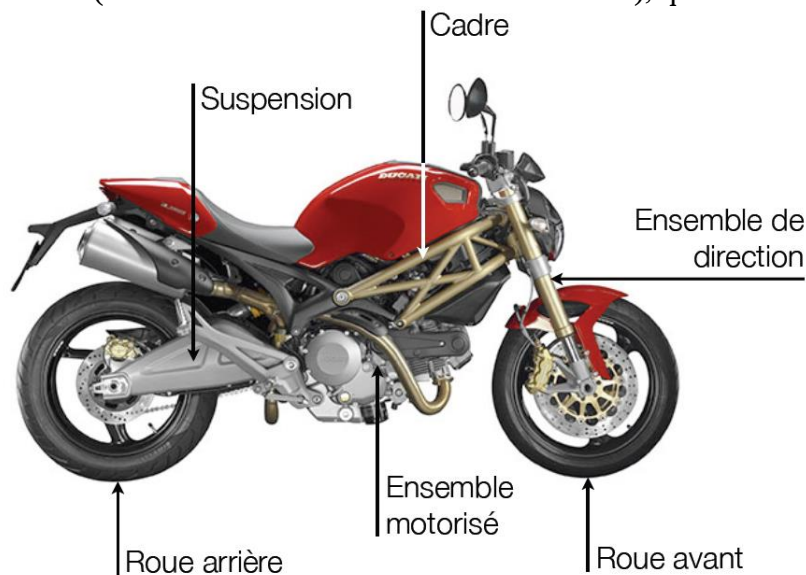
Problème 3 : Ducati Monster (inspiré de X-Ens PSI 08)

L'objectif principal de ce problème est la validation des exigences techniques d'une moto Ducati monster 900. On s'intéressera dans un premier temps aux performances cinématiques, puis aux exigences techniques en termes d'amortissement de ce véhicule à partir d'un modèle de connaissance.

1. Présentation

Comme toute moto, la Ducati monster est constituée :

- d'un cadre, qui assure la liaison entre tous les autres composants ;
- d'un ensemble de direction, qui permet d'orienter la roue avant ;
- d'un système de suspension arrière ;
- de deux roues ;
- d'un ensemble motorisé (moteur + boîte de vitesses + transmission), qui entraîne la roue arrière.



Son analyse fonctionnelle permet de faire ressortir l'extrait de cahier des charges suivant concernant l'exigence principale du véhicule.

Critère	Niveau	Limite
Stabilité	Autonome pour $V > 40\text{km/h}$	-
Vitesse de déplacement (km/h)	0 130	mini maxi
Numéro du rapport de boîte idéal à vitesse maximale	6	-
Fréquence des oscillations perçues à haute vitesse (Hz)	5	maxi

2. Dimensionnement du dernier rapport de la boîte de vitesses

La boîte de vitesses du Monster comporte 6 vitesses. Le constructeur annonce les rapports de boîte suivants.

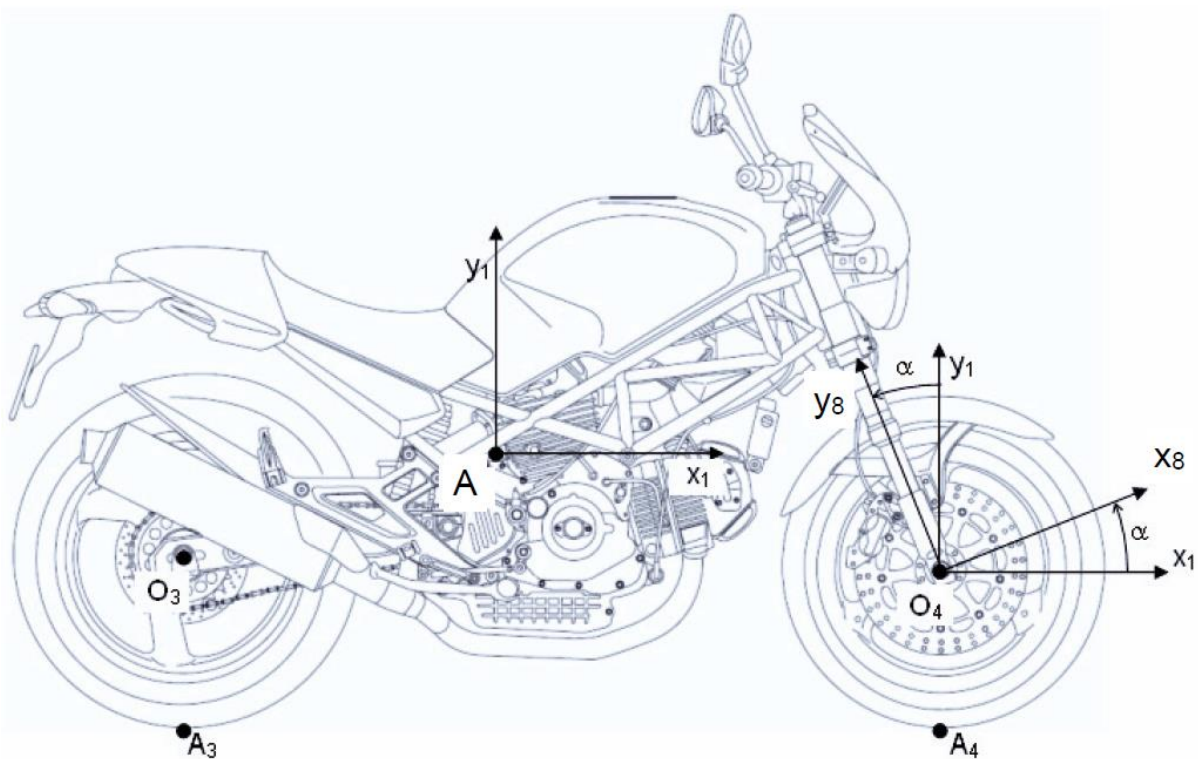
1 ^{ère}	2 ^{de}	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e
$\frac{32}{13}$	$\frac{30}{18}$	$\frac{28}{21}$	$\frac{26}{23}$	$\frac{22}{22}$	$\frac{24}{26}$

L'objectif de cette partie est de valider le rapport de la sixième vitesse en regard du troisième critère défini dans l'extrait de cahier des charges ci-avant.

2.1. Modélisation, paramétrage et hypothèses

Le modèle d'étude retenu est le suivant :

- Le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à la route. $\vec{x}_0$ est dirigé selon la vitesse d'avance de la moto. $\vec{y}_0$ est vertical ascendant.
- On associe à l'ensemble {cadre + pilote} un repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- On associe à l'ensemble de direction une base $B_8(\vec{x}_8, \vec{y}_8, \vec{z}_8)$. On pose α l'angle de chasse de la moto. C'est un angle constant et positif, définissant l'inclinaison de la fourche par rapport à la verticale. Sur le modèle étudié, il prend la valeur de 24° . $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_8) = (\vec{y}_1, \vec{y}_8) = 24^\circ$.
- La roue arrière est associée à un repère $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ où O_3 est son centre de gravité et $\vec{z}_3 = \vec{z}_1$. On pose $\theta_3(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ l'angle de rotation de la roue arrière par rapport à la moto. Cette roue est en contact avec le sol au point A_3 .
- On définit de même un repère $R_4(O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ pour la roue avant, de centre de gravité O_4 . On pose $\theta_4(t) = (\vec{x}_8, \vec{x}_4) = (\vec{y}_8, \vec{y}_4)$ l'angle de rotation de la roue avant par rapport à la moto. Cette roue est en contact avec le sol au point A_4 .



Tous les calculs seront menés autour de la position d'équilibre :

- au-delà de 40km/h, la moto est stable vis-à-vis de son inclinaison gauche/droite, c'est-à-dire qu'elle revient naturellement en position verticale dès qu'elle s'en écarte.
- le balancement avant/arrière dû aux amortisseurs et à un grand angle de rotation de la roue avant est négligé.

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{cases} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{A_3 O_3} = \overrightarrow{A_4 O_4} = R \cdot \vec{y}_0 \end{cases} \quad \text{avec } R = 29\text{cm}.$$

On suppose la moto animée d'un mouvement de translation uniforme de direction $\vec{x}_0$ impliquant que son centre de gravité G évolue ainsi :

$$\overrightarrow{V_{G \in 1/0}} = V \cdot \vec{x}_0$$

avec $V = 130\text{km/h}$. On suppose également la sixième vitesse enclenchée.

On suppose enfin que la moto évolue dans ces conditions depuis un temps suffisamment long pour qu'un régime permanent du moteur thermique soit atteint. Celui-ci tourne alors à 6100tr/min.

2.2. Etude cinématique

- Q1.** Faire les figures géométrales définissant les angles θ_3 et θ_4 .
- Q2.** Définir le mouvement de la roue 3 par rapport au cadre 1. Ecrire alors, au point O_3 , le torseur cinématique associé, noté $\{V_{3/1}\}$.
- Q3.** En déduire l'expression de $\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/1}}$.
- Q4.** Rappeler la nature et la caractéristique du mouvement du cadre 1 par rapport au sol 0. Ecrire alors, au point G, le torseur cinématique associé.
- Q5.** Exprimer alors $\overrightarrow{V_{A_3 \in 1/0}}$.

On fait l'hypothèse que les roues roulent sans glisser sur le sol.

- Q6.** Déduire des questions précédentes une expression vectorielle liant V , $\dot{\theta}_3$ et les paramètres géométriques.
- Q7.** En déduire l'expression de $\dot{\theta}_3$. Commenter.

La transmission primaire, en amont de la boîte de vitesses, diminue la vitesse angulaire du moteur d'un facteur $\frac{33}{61}$. On peut schématiser la transmission du moteur à la roue de la façon suivante.



- Q8.** Donner la relation entre la vitesse de rotation du moteur, $\dot{\theta}_m$ et la vitesse de rotation en entrée de boîte $\dot{\theta}_e$.

La chaîne de transmission entre la boîte de vitesses et la roue arrière diminue la vitesse angulaire d'un facteur $\frac{1}{3}$

- Q9.** Donner la relation entre la vitesse de rotation en sortie de boîte, $\dot{\theta}_s$ et la vitesse de rotation de la roue $\dot{\theta}_3$.
- Q10.** Déduire des questions précédentes l'expression du rapport de boîte de la sixième vitesse, r_6 , tel que : $r_6 = \left| \frac{\dot{\theta}_e}{\dot{\theta}_s} \right|$. Son expression fera intervenir : $\dot{\theta}_m$, R et V .
- Q11.** Effectuer l'application numérique de r_6 et vérifier sa valeur par rapport aux données constructeur (attention aux unités).

3. Impact des défauts de la route sur la cinématique du cadre

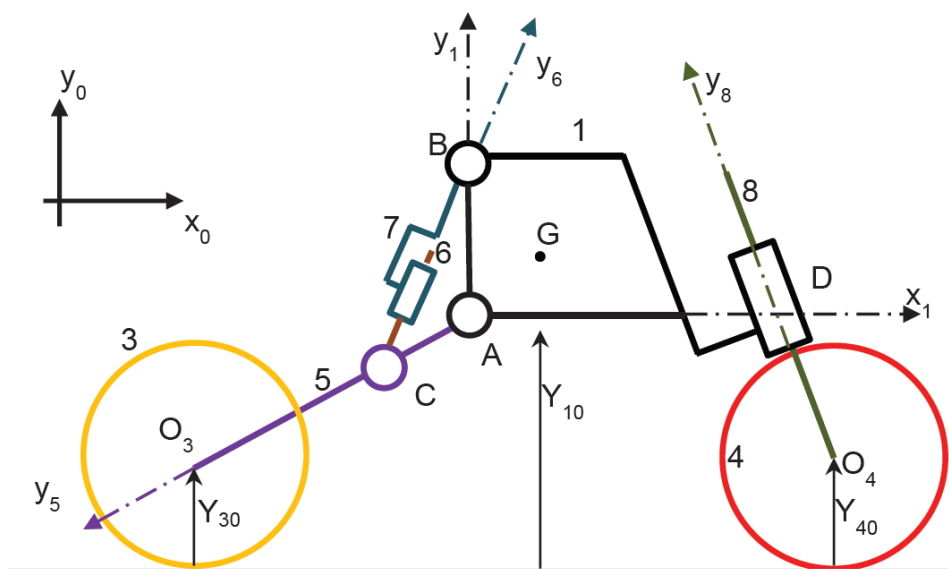
On considère que le Monster se déplace en ligne droite sur une route possédant des défauts géométriques. La moto est donc soumise à des perturbations et des oscillations qu'il est nécessaire de filtrer pour le confort des usagers avec des suspensions avant et arrière.



3.1. Modélisation, paramétrage et hypothèses

Le modèle d'étude retenu pour cette partie est représenté sur l'illustration suivante.
La moto est ainsi composée de :

- un cadre 1 ;
- une roue arrière 3 ;
- une roue avant 4 ;
- un bras oscillant 5 ;
- une tige d'amortisseur 6 ;
- un corps d'amortisseur 7 ;
- un amortisseur avant 8.



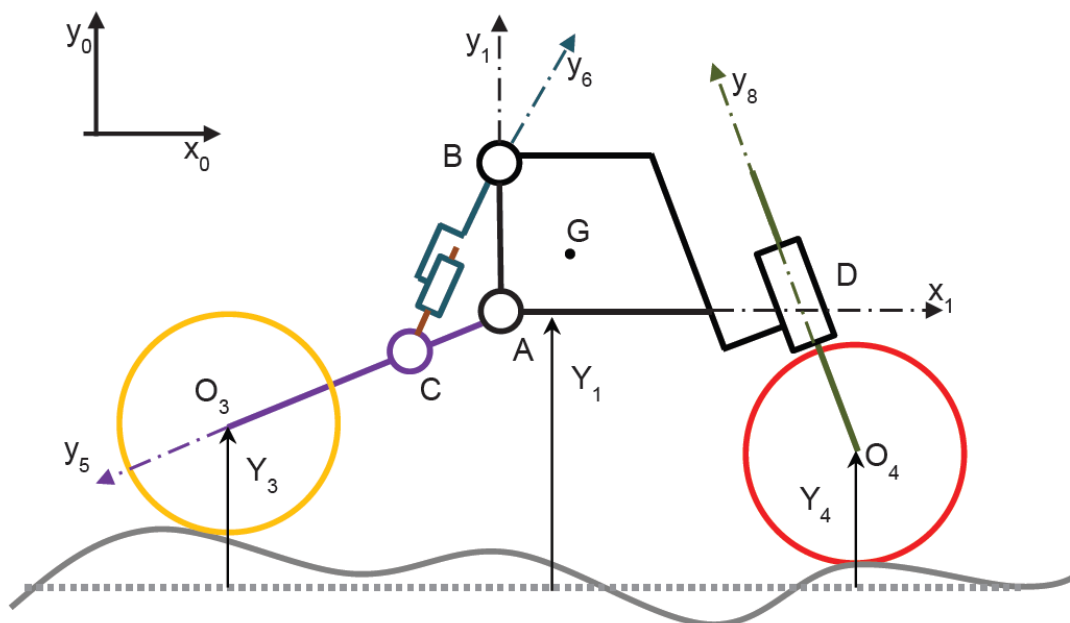
On pose les paramètres fixes suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= L_5 \cdot \overrightarrow{y_5} & \overrightarrow{AB} &= L_1 \cdot \overrightarrow{y_1} & \overrightarrow{AD} &= L_4 \cdot \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{AO_3} &= L_3 \cdot \overrightarrow{y_5} & \overrightarrow{AG} &= a \cdot \overrightarrow{x_1} + b \cdot \overrightarrow{y_1} \\ \alpha &= (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_8}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_8}) \end{aligned}$$

L'étude menée est plane : la moto se déplace dans le plan $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.

$\overrightarrow{x_0}$ est dirigé suivant la vitesse V d'avance principale de la moto et $\overrightarrow{y_0}$ est dirigé suivant la verticale ascendante.

Lorsque la route présente des défauts géométriques, deux systèmes ressort-amortisseur, placés entre les pièces 6 et 7 et entre les pièces 1 et 8, respectivement de raideur k_{67} , d'amortissement b_{67} et de raideur k_{18} , d'amortissement b_{18} , sont sollicités.



On introduit alors des paramètres variant au cours du temps :

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_5}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_5}) & \gamma(t) &= (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_6}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_6}) & \theta(t) &= (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) \\ \overrightarrow{CB} &= \lambda_6(t) \cdot \overrightarrow{y_6} & \overrightarrow{DO_4} &= -\lambda_8(t) \cdot \overrightarrow{y_8} \end{aligned}$$

On définit également les grandeurs $Y_1(t)$, $Y_3(t)$ et $Y_4(t)$, donnant la position du cadre et des roues par rapport à leurs positions sur route plane.

Par commodité, on laissera ensuite de côté la variable temporelle dans les notations. Ainsi, λ_6 désignera $\lambda_6(t)$ comme β désignera $\beta(t)$ par exemple.

3.2. Etude du bras oscillant

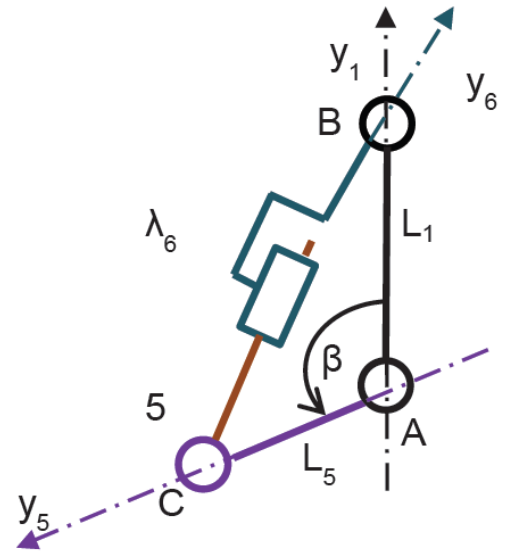
La figure ci-contre reprend uniquement le modèle de la suspension arrière avec le paramétrage posé précédemment.

Q12. Exprimer la norme du vecteur $\overrightarrow{CB}$ en fonction de λ_6 puis en fonction de β , L_1 et L_5 .

Q13. En déduire une expression de $\cos\beta$.

3.3. Comportement cinématique de la moto

Q14. La pièce 8 étant en translation rectiligne par rapport au cadre 1, donner le torseur cinématique $\{V_{8/1}\}$, exprimé au point O_4 , décrivant ce mouvement. Son expression fera intervenir $\dot{\lambda}_8$ et sera donné dans la base $B_8(\vec{x}_8, \vec{y}_8, \vec{z}_8)$.



Les défauts de la route imposent les vitesses suivantes :

$$\overrightarrow{V_{O_3 \in 5/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_3 \cdot \vec{y}_0 \quad \overrightarrow{V_{O_4 \in 8/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_4 \cdot \vec{y}_0$$

Q15. En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_4 \in 1/0}}$ en fonction de V et des variables définies.

Le cadre 1 est en mouvement de translation par rapport à R_0 , c'est-à-dire que l'on néglige les variations de l'angle θ ($\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$). On cherche à déterminer les oscillations $\dot{Y}_1$ du cadre par rapport à la route tel que :

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \cdot \vec{y}_0 = \dot{Y}_1$$

Q16. Montrer alors que :

$$\dot{\lambda}_8 = \frac{\dot{Y}_1 - \dot{Y}_4}{\cos\alpha}$$

Q17. Le bras oscillant 5 étant en rotation d'axe $(A, \vec{z}_0)$ par rapport au cadre 1, donner le torseur $\{V_{5/1}\}$ décrivant ce mouvement. On choisira un point approprié.

Q18. En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_3 \in 1/0}}$ en fonction de V et des variables définies.

Q19. Montrer alors que :

$$\dot{\lambda}_6 = \frac{L_1 \cdot L_5}{L_3 \cdot \lambda_6} (\dot{Y}_1 - \dot{Y}_3)$$

4. Vérifications des performances des suspensions

Chaque longueur variable Y est notée $Y_0 + \Delta Y$, Y_0 étant la longueur initiale lorsque la moto est sur une route idéalement droite, et ΔY la variation de longueur lorsque la moto passe sur une route réelle avec des défauts. On admettra ainsi pour la suite que

$$\Delta\lambda_8 = \frac{\Delta Y_1 - \Delta Y_4}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_6 = (\Delta Y_1 - \Delta Y_3) \frac{L_1 \cdot L_5}{L_3 \cdot \lambda_6}$$

Une étude de dynamique permet d'obtenir, à partir des allongements trouvés dans la partie précédente, l'équation de mouvement de la moto :

$$m_1 \cdot \Delta \ddot{Y}_1 = - \frac{k_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_4) - k_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3} \right)^2 \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_3) \\ - \frac{b_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot (\Delta \dot{Y}_1 - \Delta \dot{Y}_4) - b_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3} \right)^2 \cdot (\Delta \dot{Y}_1 - \Delta \dot{Y}_3)$$

où m_1 est la masse de l'ensemble {cadre + pilote + direction} ; $m_1 = 280\text{kg}$. Les masses des autres pièces sont négligées devant celle-ci.

On suppose que les roues arrière et avant sont toujours en contact avec le sol (pas perte de contact). De plus, le basculement avant/arrière de la moto n'est pas pris en compte. Dans ce cas, la roue arrière va simplement subir les mêmes oscillations du sol que la roue avant, mais avec un retard. On a donc la relation suivante :

$$\Delta Y_3(t) = \Delta Y_4(t - t_{\text{retard}})$$

On définit la longueur $e = \overrightarrow{O_3 O_4} \cdot \vec{x}_1$ qu'on suppose quasi constante

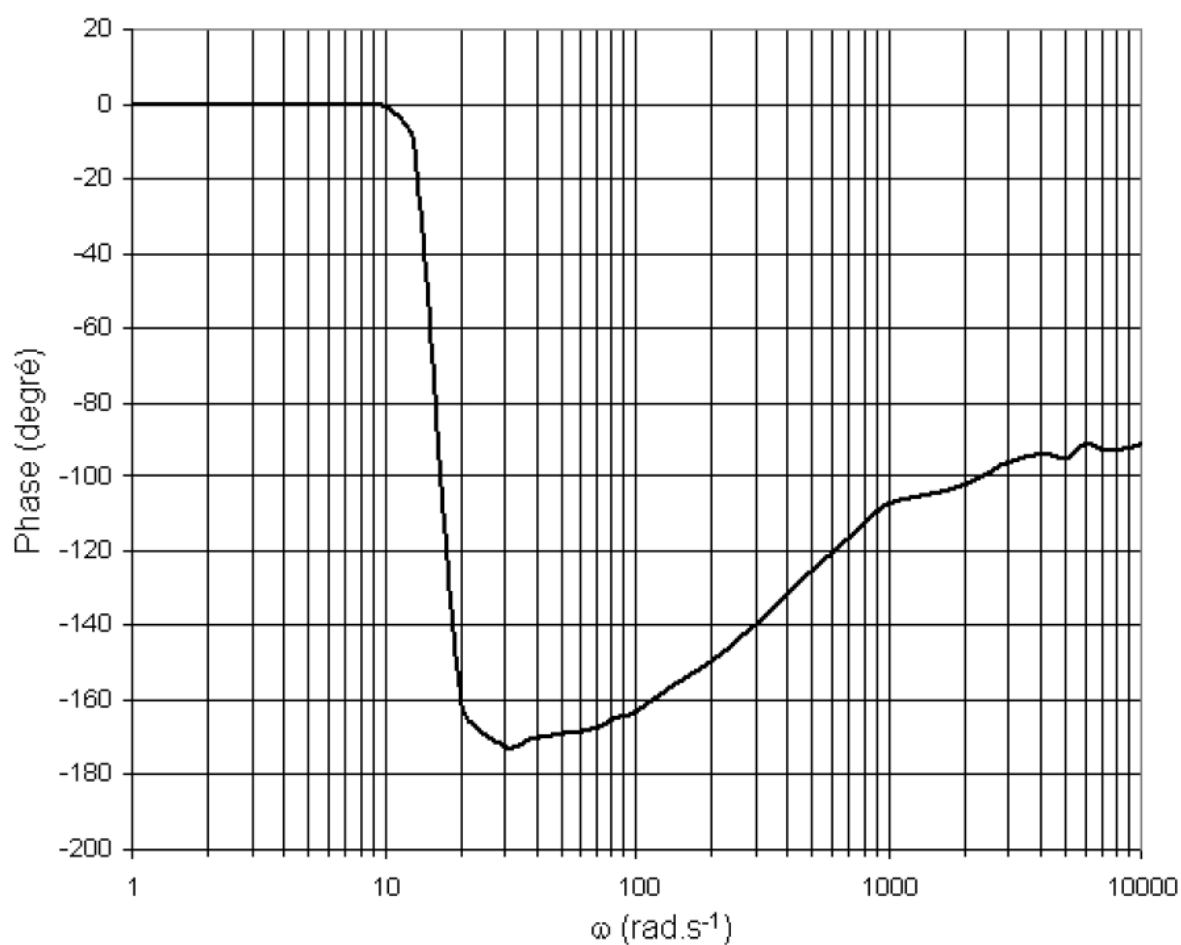
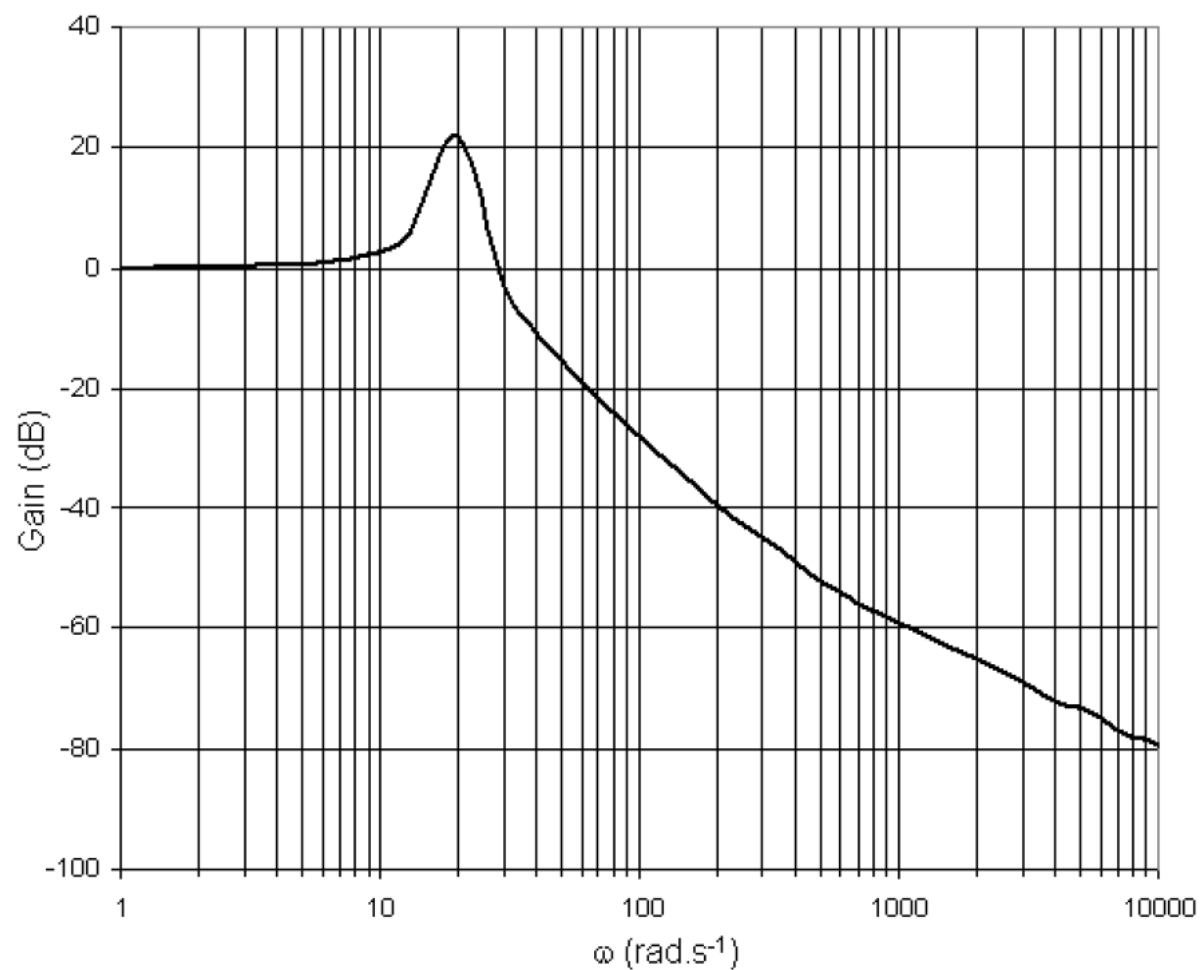
Q20. Exprimer t_{retard} en fonction de e et V

On suppose que la moto roule sur un profil de route sinusoïdal de pulsation ω en rad/s.

Grâce à la relation précédente et à l'équation de mouvement on peut établir la fonction de transfert harmonique (fréquentielle) $\underline{H}(j\omega) = \frac{\Delta Y_1}{\Delta Y_4}$ pour laquelle l'entrée est la variation d'altitude de la roue avant et la sortie, la variation d'altitude de l'ensemble {cadre + pilote + direction}.

Pour $V = 130\text{km/h}$, les diagrammes de Bode de $\underline{H}(j\omega)$ sont représentés sur les figures suivantes :

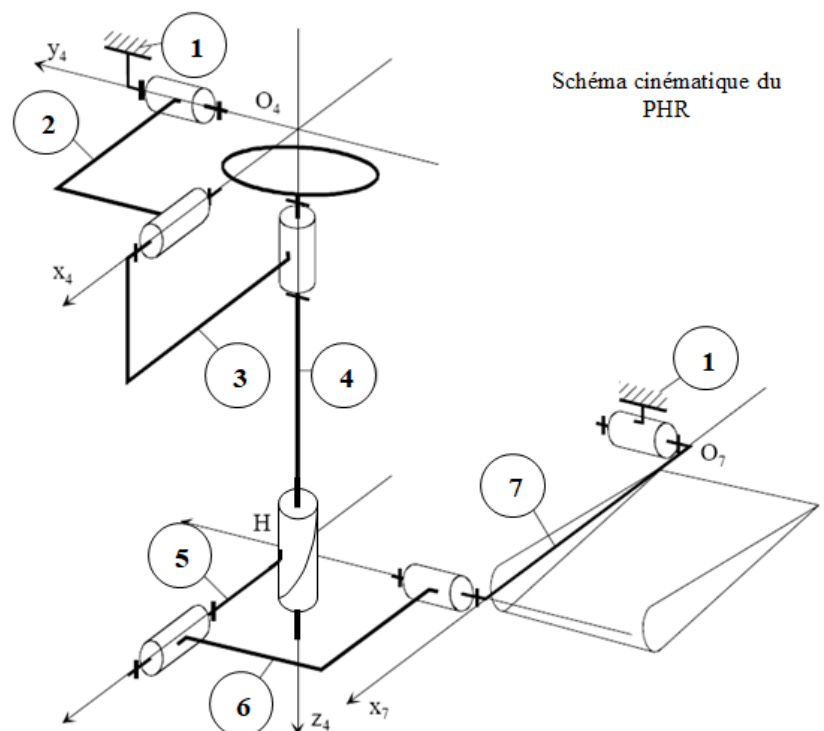
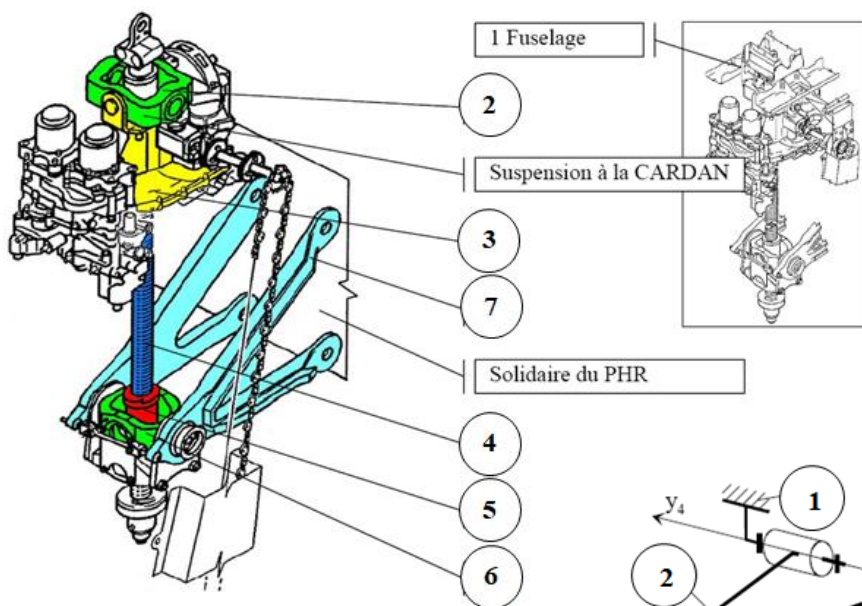
- Q21.** Quel est le comportement de la moto pour des oscillations perçues de pulsations voisines de 20 rad/s ?
- Q22.** Par combien serait multipliée l'amplitude d'entrée d'un signal sinusoïdal de pulsation $\omega = \{2 \text{ rad/s} \text{ puis } 20 \text{ rad/s} \text{ puis } 200 \text{ rad/s}\}$ pour obtenir l'amplitude de signal de sortie ?
- Q23.** Déterminer la pulsation de coupure ω_{c0} à partir de laquelle une diminution des amplitudes des oscillations perçues apparaît. On parle de bande passante à 0dB.
- Q24.** Cette valeur est-elle conforme au cahier des charges ?



Problème 4 : PHR d'airbus (extrait CCP MP 05)

Le thème proposé concerne l'aéronautique et plus particulièrement la commande en position du Plan Horizontal Réglable (PHR) de l'Airbus A340.

Le PHR peut être assimilé à une mini aile située à l'extrémité du fuselage de l'avion. Il subit donc, comme la voilure principale, une force de portance et une force de traînée qui sont fonction de l'orientation du PHR.



Les moteurs hydrauliques manœuvrent la vis 4 par l'intermédiaire d'un réducteur à engrenage. Cette vis est reliée à la structure avion 1 par l'intermédiaire d'une suspension à Cardan, c'est-à-dire que la pièce 3 est reliée par deux liaisons pivots en série, d'axes orthogonaux, à la structure 1.

L'écrou 5 entraîne l'équerre 7, solidaire du PHR, par l'intermédiaire d'une autre suspension à Cardan. Le PHR est lié à 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot.

1 – A quelle liaison normalisée correspond la liaison 3/1. Pourquoi choisir cette solution technologique ?

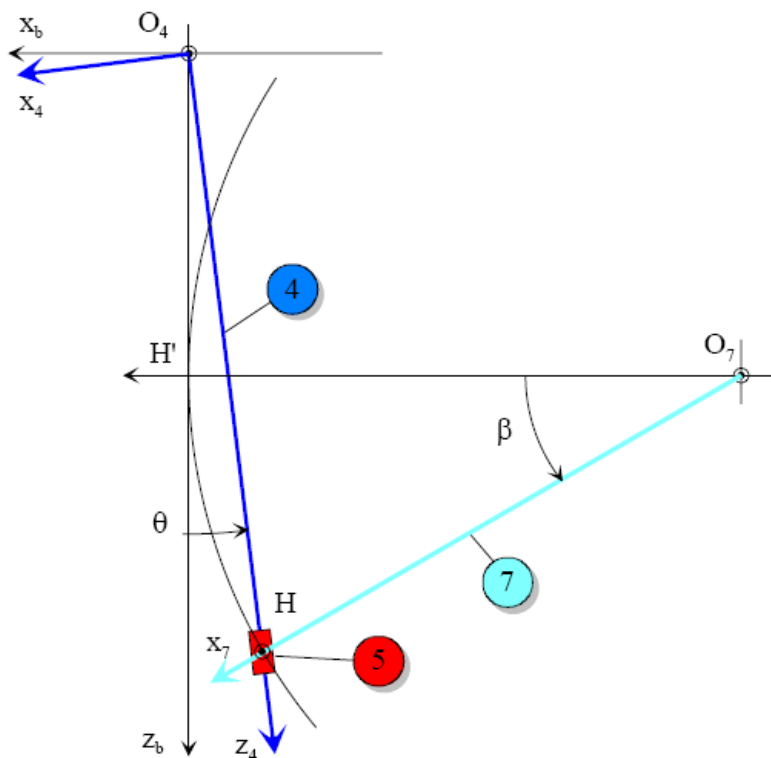
On considère la figure ci-contre représentant la commande du PHR avec β , mesuré sur $\vec{y}_b$, négatif.

On pose :

$$O_4H = z(t)$$

$$\vec{O_4O_7} = -a.\vec{x}_b + b.\vec{z}_b$$

$$O_7H = a = \text{constante}$$

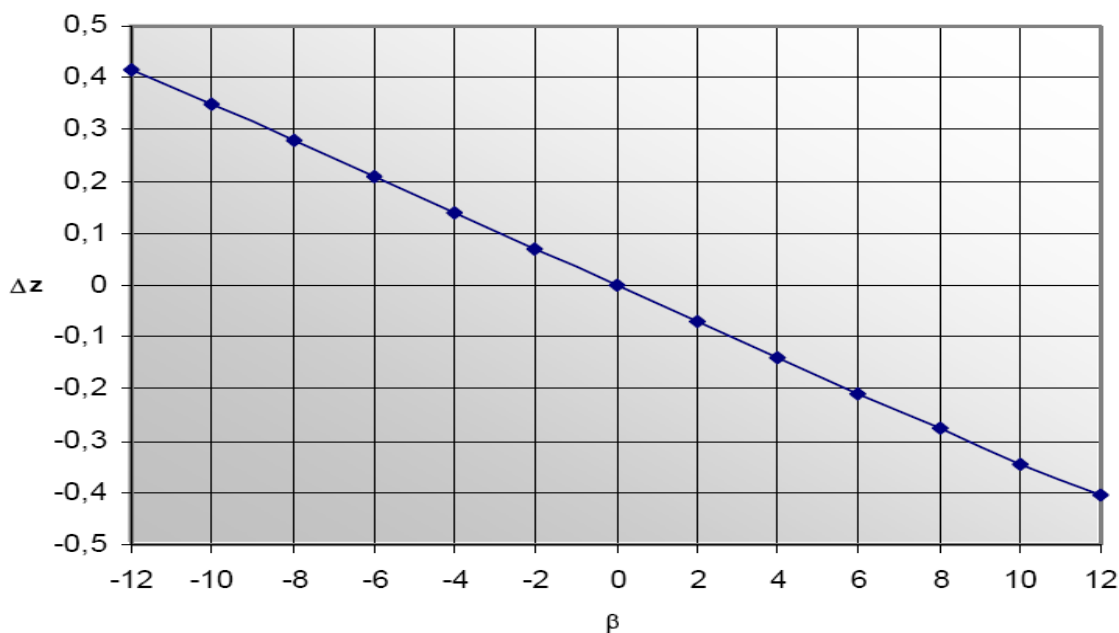


2- Démontrer la relation suivante :

$$z(t) = \sqrt{(b - a \cdot \sin \beta)^2 + a^2 \cdot (1 - \cos \beta)^2}$$

Le tableau ci-dessous donne les évolutions de $z(t)$ en fonction de $\beta(t)$ pour les valeurs de β variant de -12° à $+12^\circ$, $a=2\text{m}$ et $b=0,5\text{m}$. $\Delta z(t)$ correspond au déplacement relatif de l'écrou par rapport à sa position initiale pour laquelle $\beta=0^\circ$. La courbe $\Delta z = f(\beta)$ montre bien que cette évolution peut être considérée comme étant linéaire. Dès lors, on peut écrire : $\beta(\text{rad}) = K_v \cdot \Delta z(\text{m})$

β (degrés)	-12	-8	-4	0	4	8	12
z (mètres)	0,917	0,779	0,64	0,5	0,361	0,223	0,095
Δz (mètres)	0,417	0,279	0,14	0	-0,139	-0,277	-0,405



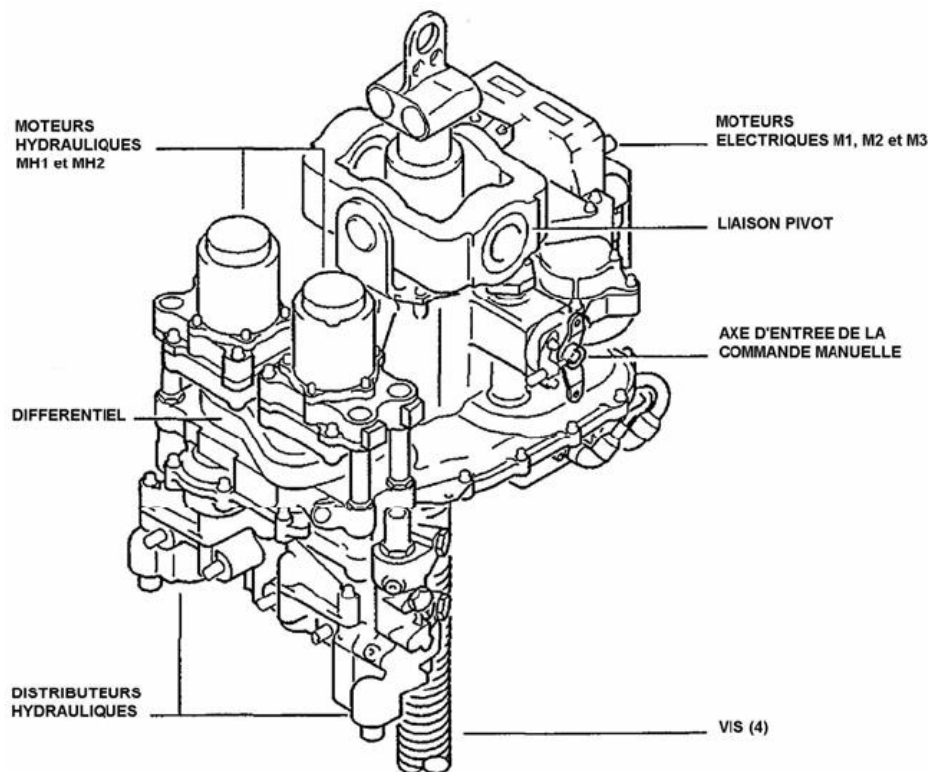
3- Sachant que l'angle d'inclinaison β du PHR doit être compris entre -12 et 4° , en déduire : la valeur de K_v et la longueur utile de la vis.

Afin de répondre aux exigences de fiabilité qui stipulent, en particulier, que le PHR doit pouvoir fonctionner durant 10^9 FH (Fly Hour) sans subir de défaillance, un certain nombre de composants de la chaîne fonctionnelle du PHR sont doublés ou triplés suivant les cas.

D'autre part, toujours par souci de sécurité, le PHR peut être commandé :

- Soit automatiquement par un ordinateur de bord qui détermine la valeur optimale de l'angle β ,
- Soit manuellement par le pilote à partir d'un volant de commande situé dans le poste de pilotage.

Dans les 2 cas, les consignes émises par le calculateur ou par le pilote agissent sur les tiroirs des distributeurs alimentant 2 moteurs hydrauliques fonctionnant simultanément et dont les arbres de sortie entraînent, via un différentiel et un réducteur, la rotation de la vis 4 et donc celle du PHR.



Etude de l'asservissement en position de la vis 4 :

Le fonctionnement de ce dispositif peut se décomposer en 2 phases (cf figures page suivante) :

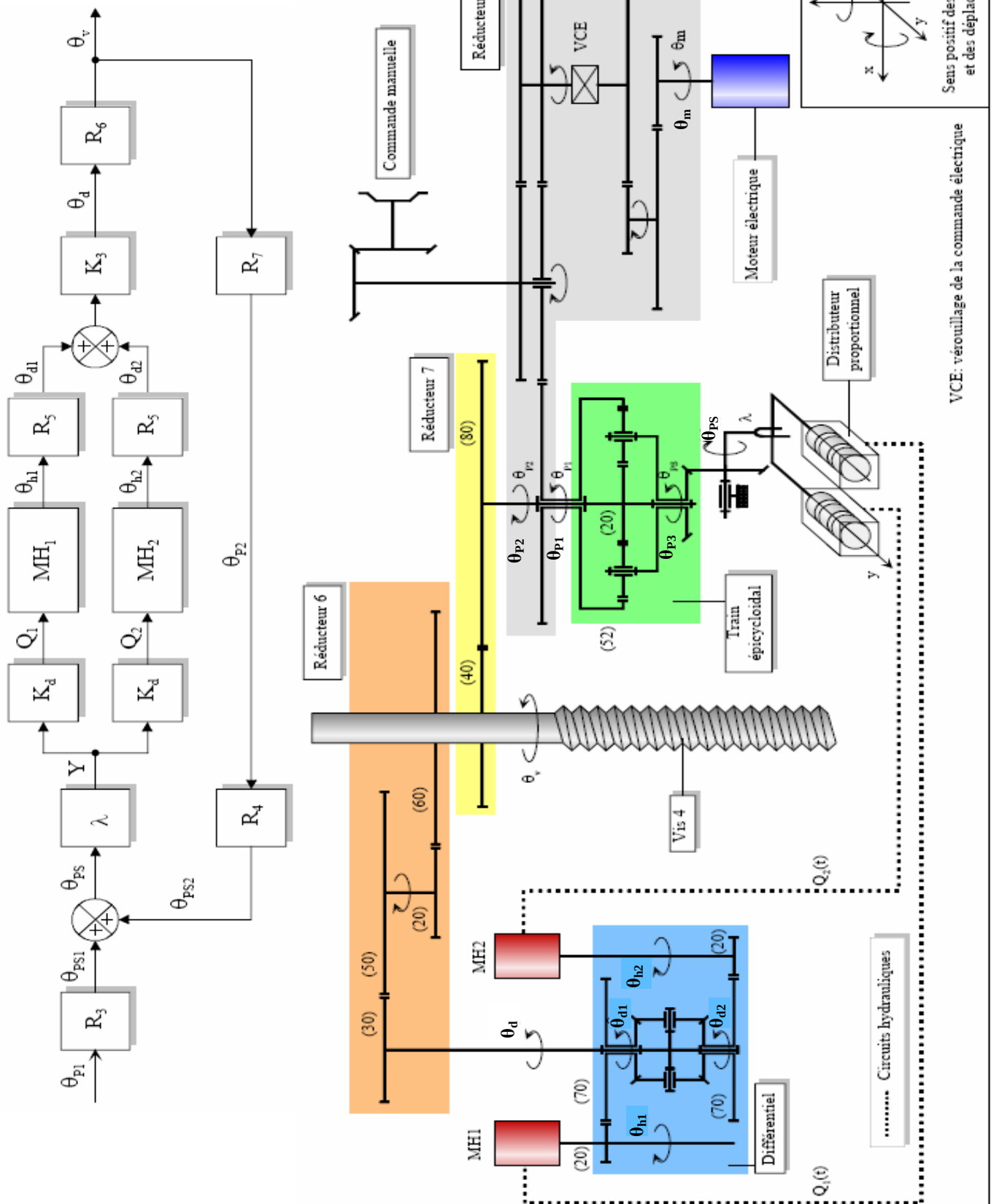
Phase 1 : suite à une rotation d'un angle θ_m de l'axe du moteur électrique, le planétaire couronne P_1 du train épicycloïdal tourne d'un angle θ_{P1} . Lors de cette rotation, on considère que le planétaire pignon P_2 , lié à la vis, reste immobile, le porte satellite PS tourne d'un angle $\theta_{PS1} = R_3 \cdot \theta_{P1}$ ce qui provoque l'ouverture des tiroirs des distributeurs et l'alimentation des moteurs hydrauliques.

Phase 2 : les moteurs hydrauliques étant désormais alimentés, leur rotation entraîne celle de la vis 4 via le différentiel et le réducteur 6. La rotation de la vis entraîne celle du planétaire pignon P_2 du train épicycloïdal d'un angle θ_{P2} . Lors de cette rotation, on considère que le planétaire couronne P_1 reste immobile, le porte satellite PS tourne en sens inverse d'un angle $\theta_{PS2} = R_4 \cdot \theta_{P2}$ ce qui provoque la fermeture des tiroirs des distributeurs et l'arrêt de la rotation de la vis.

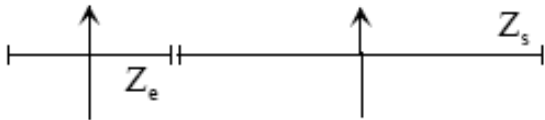
La rotation du porte satellite PS résultant de ces deux rotations est telle que : $\theta_{PS} = \theta_{PS1} + \theta_{PS2}$.

La boucle d'asservissement est représentée ci-dessous :

- 4- *A l'aide de la description ci-dessus et de l'annexe, déterminer les rapports de réduction R_3 et R_4 du train épicycloïdal.*
A.N. : $Z_{P1} = 52$ et $Z_{P2} = 20$
- 5- *Déterminer de même les rapports $R_5 = \frac{\theta_{d1}}{\theta_{h1}} = \frac{\theta_{d2}}{\theta_{h2}}$ du différentiel, $R_6 = \frac{\theta_v}{\theta_d}$ et $R_7 = \frac{\theta_{P2}}{\theta_v}$ des réducteurs 6 et 7. (Les nombres de dents des roues dentées sont indiqués entre parenthèses sur l'annexe)*
- 6- *A l'aide des indications fournies en annexe, déterminer la relation $\theta_d = f(\theta_{d1}, \theta_{d2})$. En déduire la valeur du gain K_3 du différentiel.*
- 7- *Quelle conséquence, avec un tel dispositif, aurait une défaillance d'un moteur hydraulique sur le couple (ou effort) transmis en sortie du différentiel ? Votre raisonnement pourra s'appuyer sur le résultat suivant. La puissance des actions mécaniques transmises dans le cas d'un mouvement de rotation vaut le couple (noté C) fois la vitesse de rotation (notée ω) : $P = C\omega$.*

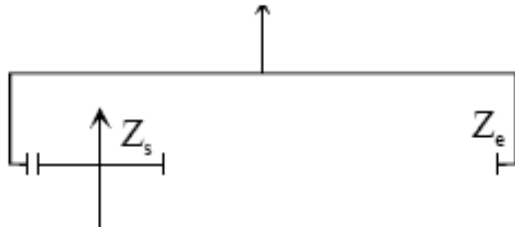


ANNEXE



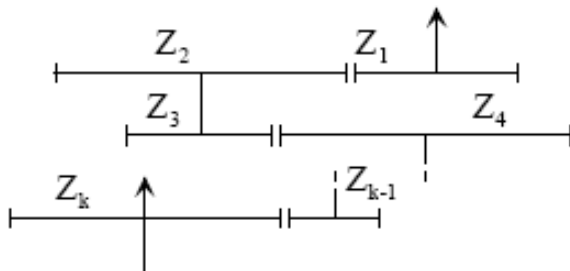
Contact extérieur

$$r = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e} = -\frac{Z_e}{Z_s}$$



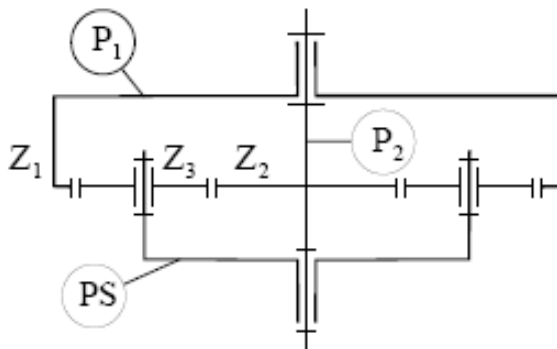
Contact intérieur

$$r = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\Delta\theta_s}{\Delta\theta_e} = \frac{Z_e}{Z_s}$$



Train d'engrenages

$$r = \frac{\omega_k}{\omega_1} = \frac{\Delta\theta_k}{\Delta\theta_1} = (-1)^n \frac{Z_1}{Z_2} \frac{Z_3}{Z_4} \dots \frac{Z_{k-1}}{Z_k}$$

où n : nombre de contacts extérieurs.

Train épicycloïdal

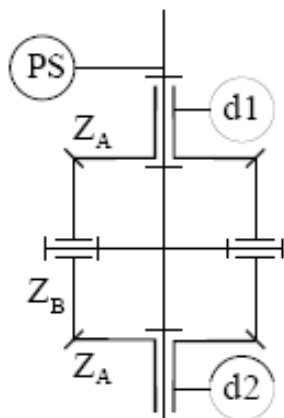
- Raison basique

$$rb = \frac{\omega_{P2/PS}}{\omega_{P1/PS}} = -\frac{Z_1}{Z_3} \frac{Z_3}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

- Formule de Willis

$$\begin{cases} \omega_{P2/PS} = \omega_{P2/bdti} - \omega_{PS/bdti} = \omega_{P2} - \omega_{PS} \\ \omega_{P1/PS} = \omega_{P1/bdti} - \omega_{PS/bdti} = \omega_{P1} - \omega_{PS} \end{cases}$$

$$\frac{\omega_{P2} - \omega_{PS}}{\omega_{P1} - \omega_{PS}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



Différentiel

- Raison basique

$$rb = \frac{\omega_{d2/PS}}{\omega_{d1/PS}} = -\frac{Z_A}{Z_B} \frac{Z_B}{Z_A} = -1$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{d2/PS} = \omega_{d2/bdti} - \omega_{PS/bdti} = \omega_{d2} - \omega_{PS} \\ \omega_{d1/PS} = \omega_{d1/bdti} - \omega_{PS/bdti} = \omega_{d1} - \omega_{PS} \end{cases}$$

Problème 5: Robot Sphero (extrait Centrale MP 18)

I. Mise en situation

I.1.Contexte

Une nouvelle génération de robots à mobilité non conventionnelle a vu le jour avec la conception de robots en forme de sphère. Ces robots commencent à être utilisés dans des environnements difficiles (centrale nucléaire, terrain irrégulier) pour des missions d'inspection et de surveillance. Ce type de robot est aussi présent dans l'industrie du divertissement sous la forme d'objets connectés contrôlables avec un smartphone (ou tablette). C'est le cas du robot Sphero créé par la société Orbotix et qui sert de support d'étude pour ce sujet.

I.2.Présentation du robot Sphero

Créé pour le loisir et l'éducation, le robot Sphero roule sur lui-même pour se déplacer. Une base robotique appelée module interne et dite différentielle (plateforme munie de deux roues motrices indépendantes, de même axe) est placée dans une sphère (le corps du robot) qui sert de liaison au sol et permet le déplacement (Figure 1). Le Sphero est commandé par un smartphone avec lequel l'utilisateur guide le robot.

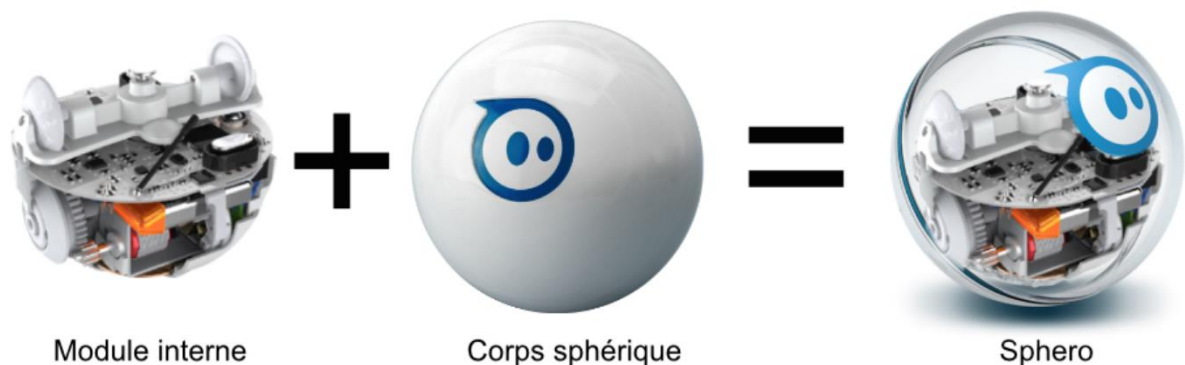


Figure 1 : Constitution du Sphero

Même si les consignes de l'utilisateur correspondent au comportement attendu du Sphero (cap et vitesse du corps sphérique), c'est en réalité le module interne que l'utilisateur commande grâce à son smartphone. Le principe de déplacement du Sphero peut être comparé à celui d'une roue de hamster : quand l'animal court à l'intérieur, il déplace le centre de gravité du système, ce qui fait tourner la roue. Ainsi, les deux roues motrices du module interne créent le roulement du corps sphérique du Sphero.

I.3.Architecture détaillée du robot Sphero

La composition du robot est fournie par le diagramme de définition des blocs Figure 3. L'avance et l'orientation du robot sont créées par le module interne qui possède deux blocs de motorisation identiques et indépendants (comportant chacun en particulier une roue motrice et un moteur).

Le module interne est également équipé d'une centrale inertielle composée d'un magnétomètre (mesure du champ magnétique terrestre), d'un accéléromètre numérique (qui calcule les déplacements selon trois axes par double intégration des accélérations mesurées) ainsi que d'un gyromètre (mesure des vitesses de rotation en deg/s autour de trois axes) permettant d'acquérir les informations décrites par la Figure 2.

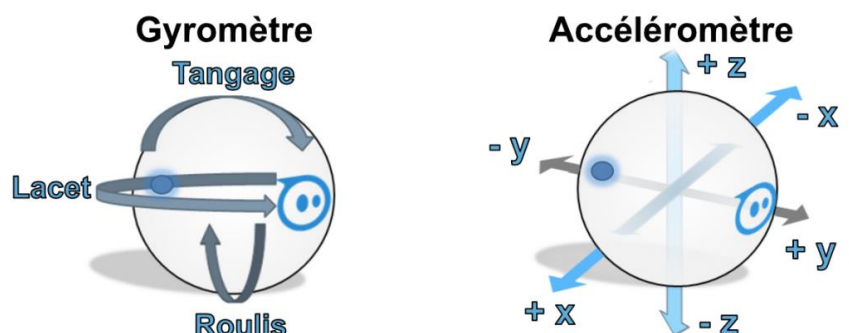


Figure 2 : Illustration des informations acquises par la centrale inertielle

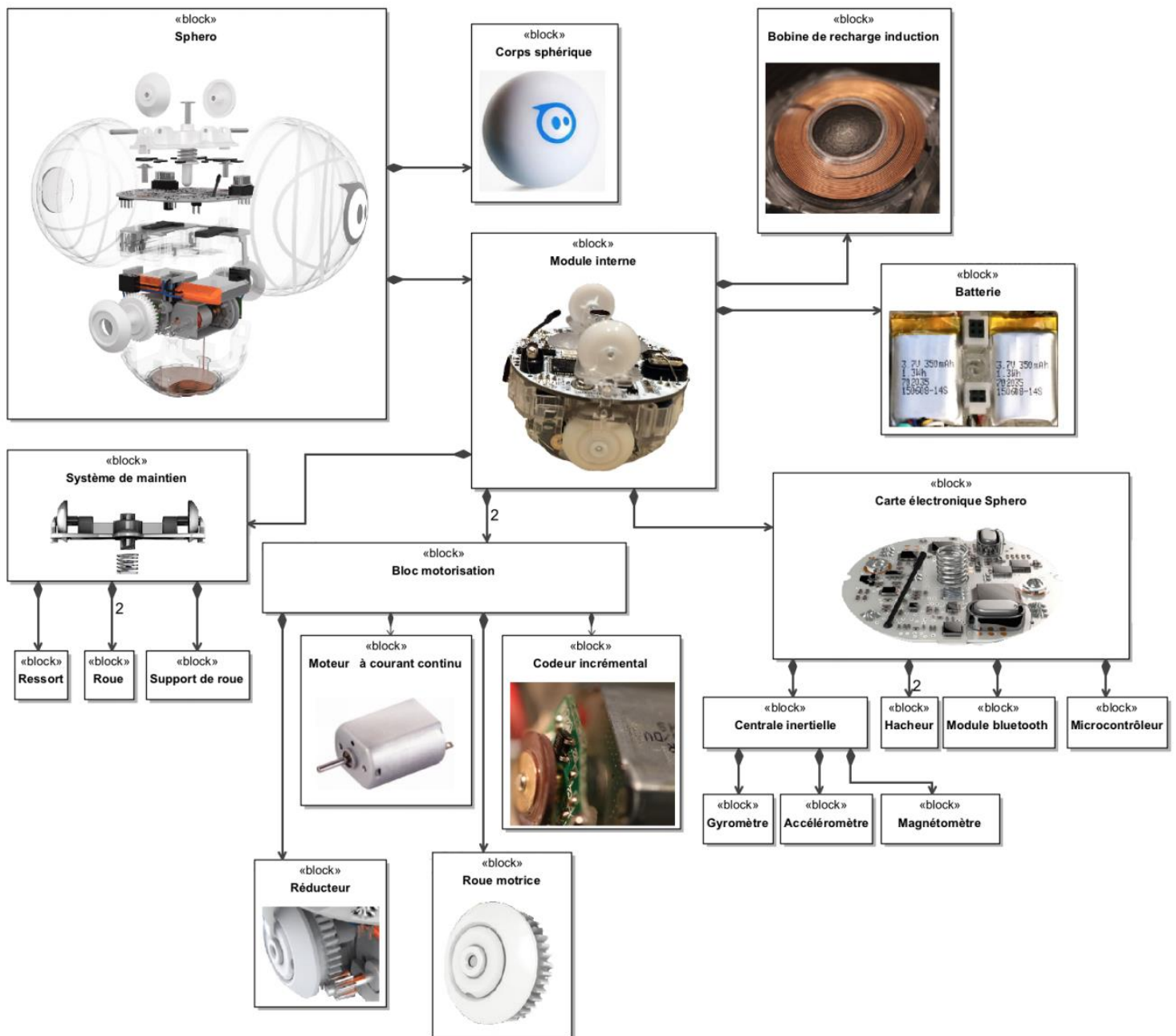


Figure 3 : Diagramme de définition des blocs du Sphéro

I.4. Manipulation et déplacement du robot Sphéro

Pour commander le robot, l'utilisateur dispose d'une application sur son smartphone (ou sa tablette). Une fois la connexion bluetooth établie entre le Sphéro et le smartphone, l'utilisateur peut mettre en mouvement le robot grâce à une interface tactile (Figure 4).

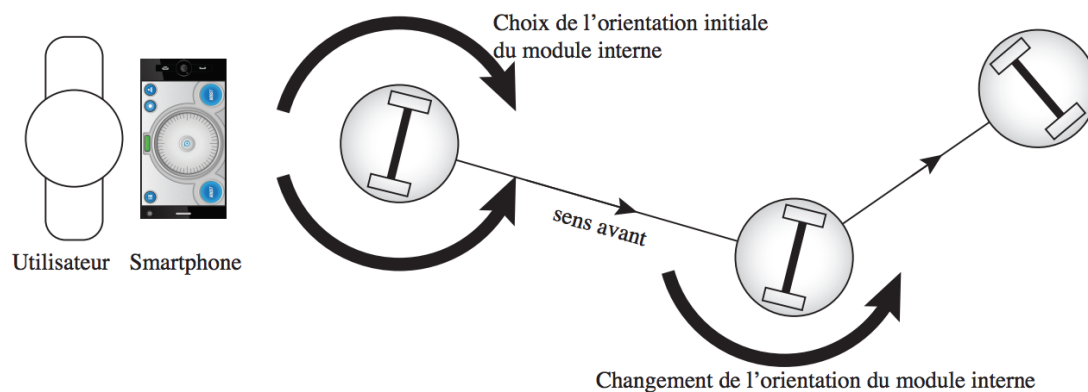


Figure 4 : Déplacement du robot

Un exemple de déplacement du robot Sphero est décrit par la Figure 4. Pour un cap donné le Sphero se déplace selon une trajectoire rectiligne. Lorsque le cap est changé par l'utilisateur, le module interne change son orientation autour d'un axe vertical de lacet et une nouvelle direction est ainsi imposée au Sphero. Ce dernier reprend un déplacement en ligne droite suivant le nouveau cap.

I.5. Performances attendues

Afin que l'utilisation du robot soit à la hauteur des attentes de l'utilisateur, le robot Sphero doit satisfaire les exigences définies Figure 5.

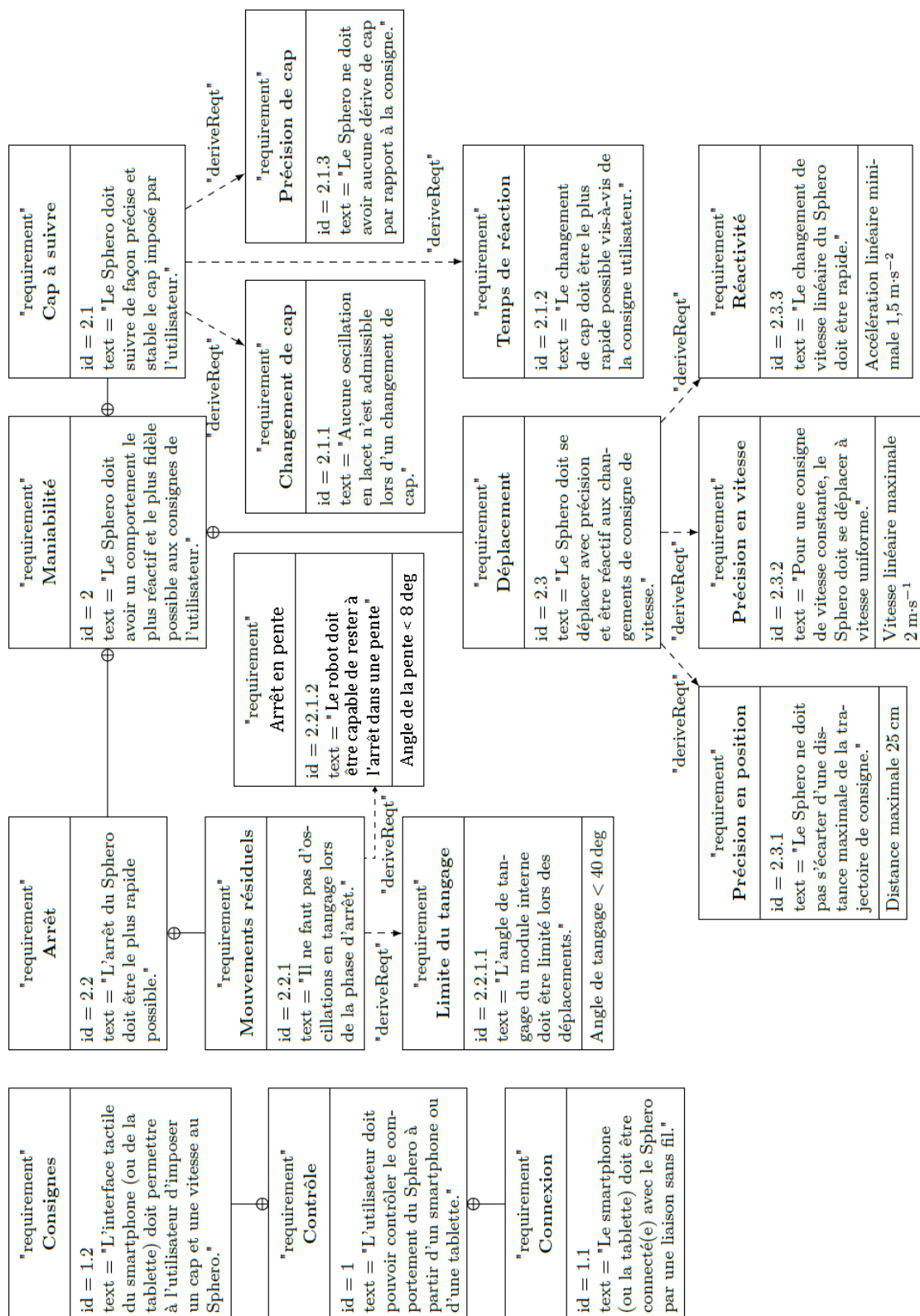


Figure 5 : Diagramme des exigences du Sphero

II. Respect de l'exigence 2 de maniabilité

La Figure 6 montre la trajectoire suivie par le Sphero lors d'un essai réalisé en mode non asservi.

A l'écran de l'ordinateur est affiché un parcours délimité par deux lignes et l'utilisateur peut cliquer à l'écran pour imposer au Sphero une consigne de cap. Celle-ci correspond à la direction du vecteur ayant pour origine la position mesurée du Sphero au moment du clic et pour extrémité le point cliqué à l'écran. L'expérimentation est réalisée en intérieur et sans aucune perturbation pouvant altérer le fonctionnement du robot. La vitesse du robot est volontairement limitée à 50% de sa vitesse maximale afin de rendre la manipulation plus aisée.

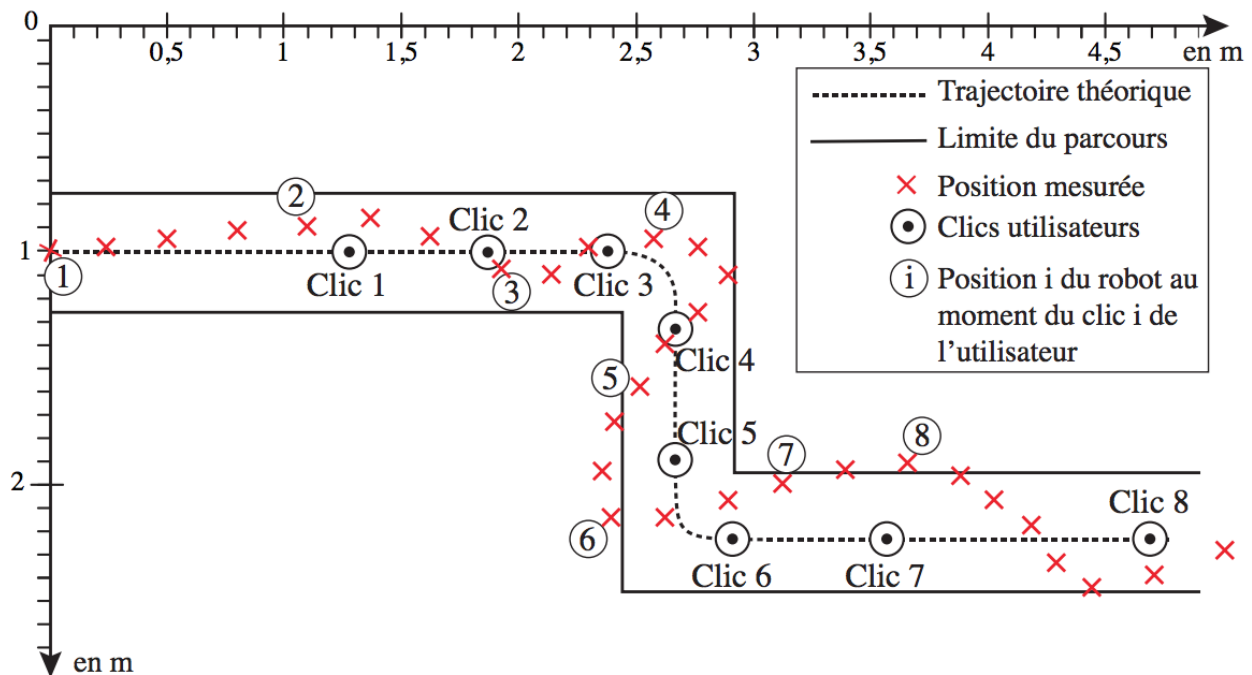


Figure 6 : Trajectoire du Sphero

- Q1.** En considérant le Sphero comme parfaitement asservi aux consignes de clic de l'utilisateur, quel serait le nombre minimal de consignes de changement de cap nécessaire pour faire évoluer le robot selon la trajectoire théorique ? Pour chacune de ces consignes de changement de cap quelle est la valeur du cap imposé (à l'instant initial le cap est de 0 deg) ?
- Q2.** D'après l'expérimentation, l'exigence 2.3.1 de maniabilité est-elle respectée ? Justifier la réponse.

III. Déplacement et réglage de cap du robot Sphero

Le robot est équipé de deux actionneurs (moteurs électriques à courant continu) indépendants. Il est de fait nécessaire de mettre en évidence le lien entre le comportement du robot Sphero et celui des actionneurs.

Objectif : Mettre en évidence la relation entre les actionneurs et le comportement du Sphero, afin de déterminer la façon dont les actionneurs doivent être commandés pour valider l'exigence 2.3.

III.1. Modélisation et paramétrage

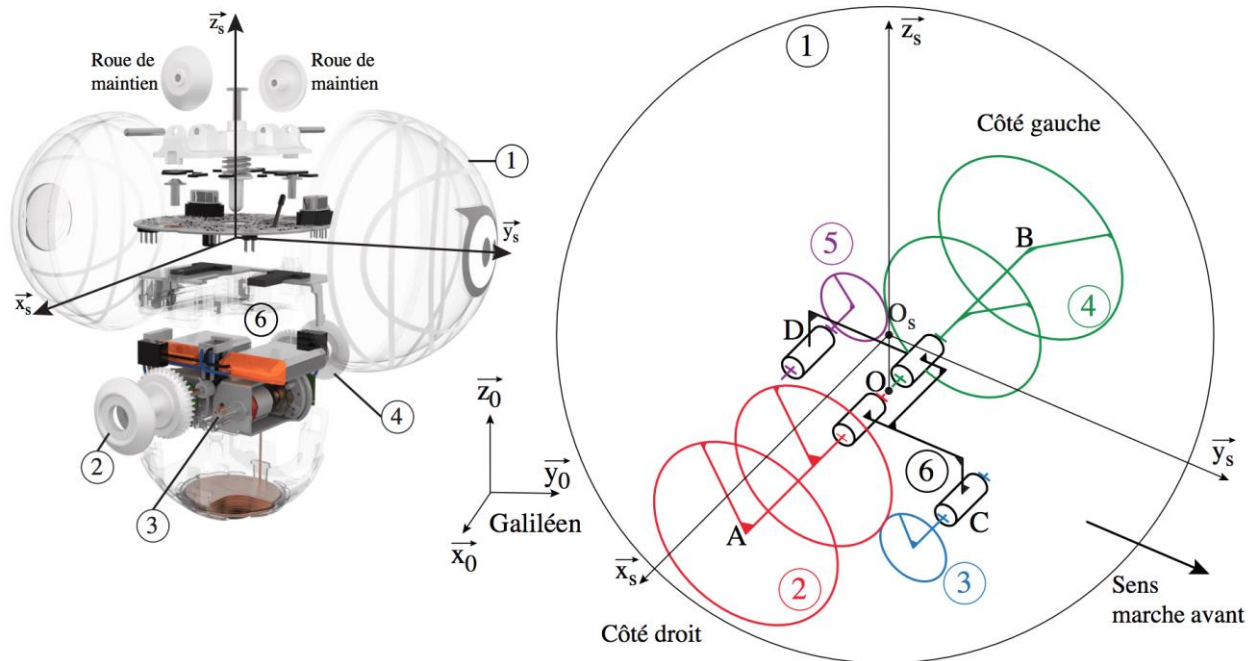


Figure 7 : Schéma cinématique 3D du Sphero (sans le système de maintien)

1 désigne le corps sphérique du robot, 2 la roue motrice droite, 3 l'arbre moteur denté droit, 4 la roue motrice gauche, 5 l'arbre moteur denté gauche et 6 le châssis du module interne. Par la suite la désignation « module interne » correspond à l'ensemble {2, 3, 4, 5, 6}.

Le repère $R_s = (O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ accompagne le robot Sphero et est tel que $\vec{z}_s = \vec{z}_0$ à chaque instant du mouvement, avec $\vec{z}_0$ la verticale du lieu et $\vec{y}_s$ dans la direction d'avance du robot. Le point O_s correspond au centre du corps sphérique du robot.

Le châssis du module interne possède une mobilité en lacet et une en tangage par rapport au corps du Sphero (voir Figure 2). Le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière.

Le repère $R_6 = (O, \vec{x}_6 = \vec{x}_s, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ se déduit du repère R_s par rotation d'angle α autour de l'axe $(O, \vec{x}_s)$. Cet angle α définit l'angle de tangage du châssis du module interne par rapport au repère R_s . Le repère $R_{6'} = (O, \vec{x}_{6'} = \vec{x}_6, \vec{y}_{6'}, \vec{z}_{6'} = \vec{z}_6)$ lié au châssis du module interne, se déduit du repère R_6 par rotation d'angle β autour de l'axe $(O, \vec{z}_6)$. Cet angle β définit l'angle de lacet du châssis du module interne par rapport au repère R_s .

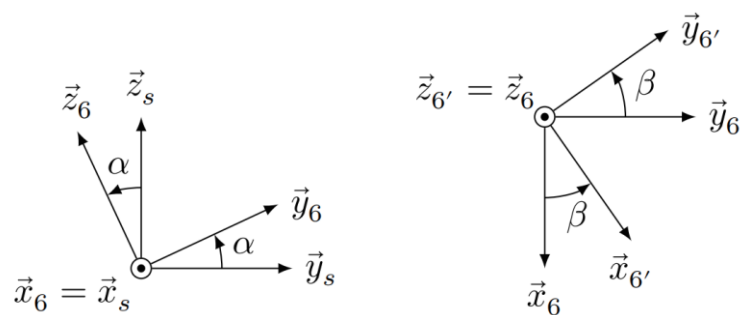


Figure 8 : Définition des repères R_6 et $R_{6'}$

La Figure 9 propose un schéma cinématique du Sphero projeté dans le plan $(O, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ ainsi que dans le plan $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ (le système de maintien n'est pas pris en compte).

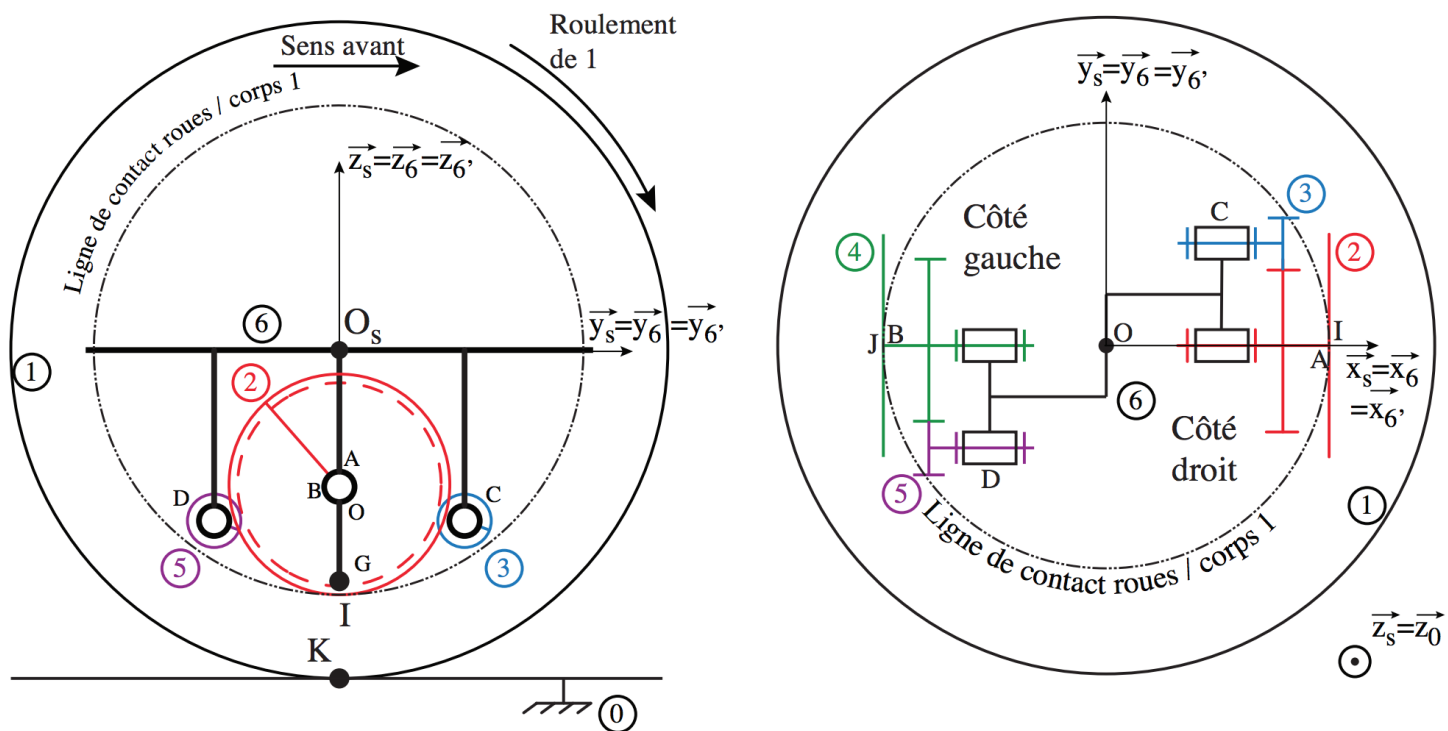


Figure 9 : Schémas cinématiques du Sphero vu de côté et de dessus avec $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

Le graphe des liaisons du robot Sphero (sans le système de maintien) est présenté Figure 10.

Hypothèses :

L'hypothèse de roulement sans glissement sera adoptée au point I (point de contact 2/1), au point J (point de contact 4/1) et au point K (point de contact 1/0).

Modèles cinématiques :

Les torseurs cinématiques sont notés :

$$\left\{ \mathcal{V}_{i/j} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p_{ij} & u_{ij} \\ p_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{matrix} \right\}_{M, B_{6'}} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega}_{i/j} = p_{ij} \overrightarrow{x}_{6'} + q_{ij} \overrightarrow{y}_{6'} + r_{ij} \overrightarrow{z}_{6'} \\ \overrightarrow{V}_{(M \in i/j)} = u_{ij} \overrightarrow{x}_{6'} + v_{ij} \overrightarrow{y}_{6'} + w_{ij} \overrightarrow{z}_{6'} \end{matrix} \right\}_M$$

Données (avec hypothèse $\alpha = \beta = 0$) :

- $\overrightarrow{IA} = R \overrightarrow{z}_{6'} = \overrightarrow{JB}$ avec $R = 12$ mm rayon de la roue motrice 2
- $\overrightarrow{OA} = L \overrightarrow{x}_{6'} = -\overrightarrow{OB}$
- $\overrightarrow{OO_s} = h_r \overrightarrow{z}_s$ avec $h_r = 15$ mm
- $\overrightarrow{O_s K} = R_s \overrightarrow{z}_s$ avec $R_s = 37$ mm rayon du corps sphérique 1
- Le rapport de réduction entre 2 et 3 (et entre 4 et 5) est noté k avec $k = \frac{p_{26}}{p_{36}} = \frac{p_{46}}{p_{56}} = -0.21$

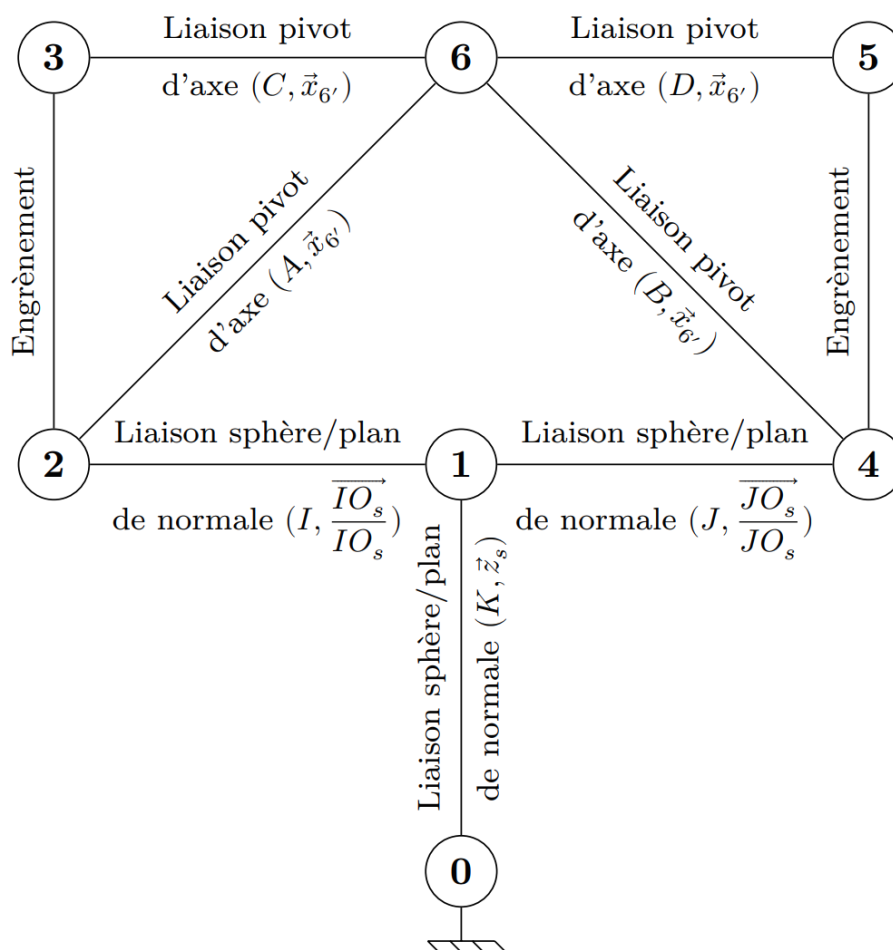


Figure 10 : Graphe des liaisons du Sphero

Q3. Exprimer les conditions de roulement sans glissement aux points de contact I et J.

Q4. En exploitant la condition de roulement sans glissement au point de contact J, montrer que l'expression de r_{21} en fonction de p_{46} et p_{26} est de la forme $r_{21} = \lambda (p_{46} - p_{26})$. Déterminer λ en fonction de R et L.

On rappelle que le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière. Le torseur cinématique $\{\sqrt{6/1}\}$ en O_s est donc de la forme :

$$\{\sqrt{6/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O_s, B_{6'}}$$

où p_{61} correspond au taux de rotation en tangage du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero, et r_{61} correspond au taux de rotation en lacet du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 du Sphero.

On se place dans les hypothèses correspondant aux schémas cinématiques Figure 9 ($\alpha=\beta=0$).

Q5. Par une relation de composition des mouvements écrite au point A et faisant intervenir les solides 1,2 et 6

- montrer que l'expression de r_{61} en fonction de p_{46} et p_{26} est de la forme $r_{61} = \lambda (p_{46} - p_{26})$
- en déduire l'expression de p_{21} en fonction de p_{46} et de p_{26}
- donner l'expression de p_{61} en fonction de p_{26} et de p_{46} sous la forme $p_{61} = \mu (p_{46} + p_{26})$. En déduire μ .

Q6. Montrer alors que l'expression de p_{61} est de la forme $p_{61} = \delta(p_{36} + p_{56})$ avec δ à déterminer.

Lors d'un changement de cap du Sphero le châssis du module interne admet un mouvement de lacet autour de l'axe $(O, \vec{z}_{6'})$. Le cap du robot Sphero est en fait imposé par celui du module interne. Le lacet du châssis du module interne ne doit pas induire de tangage car l'avance et le changement de cap du Sphero doivent être indépendants.

III.2. Comportement des actionneurs pour un changement de cap

Q7. Quelle doit être la valeur de p_{61} lors d'un changement de cap ?

Q8. En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero lors d'un changement de cap.

III.3. Comportement des actionneurs pour un déplacement en ligne droite

Q9. Quelle est la valeur de r_{61} lorsque le Sphero se déplace en ligne droite ?

Q10. En déduire la relation entre les taux de rotation des moteurs du Sphero afin que ce dernier puisse se déplacer en ligne droite.

III.4. Vitesse d'avance et respect de l'exigence 2.3 de déplacement

Au point K de contact entre le corps **1** et le sol noté **0**, il y a roulement sans glissement. Le torseur cinématique de la liaison 1/0 s'écrit donc en K et dans la base $B_s(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$:

$$\{ \vee 1/0 \} = \begin{Bmatrix} p_{10} & 0 \\ q_{10} & 0 \\ r_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{K, B_s}$$

Q11. Lors d'un mouvement d'avance en ligne droite, donner la relation entre p_{10} , R_s et v la vitesse d'avance du robot par rapport au sol avec $v = \overrightarrow{V(0_s \in 1/0)} \cdot \vec{y}_s$

Pour cette étude, on se place en régime établi où l'angle de tangage α du module interne est constant.

Q12. Pour α constant et toujours lors d'un déplacement en ligne droite $\vec{x}_s = \vec{x}_{6'} = \vec{x}_6$, que vaut la composante $p_{60} = \overrightarrow{\Omega_{6/0}} \cdot \vec{x}_s$ correspondant à la vitesse de tangage du module interne par rapport au sol ?

Q13. En déduire la relation entre p_{10} et p_{61} .

Le constructeur du robot Sphero annonce une vitesse maximale d'avance en ligne droite

$v = \overrightarrow{V(0_s \in 1/0)} \cdot \vec{y}_s = 2 \text{ m/s}$ alors que les moteurs possèdent un taux de rotation maximal de 6000 rpm = 6000 tr.min⁻¹.

Q14. Déterminer l'expression de v en fonction de p_{36} et de p_{56} . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 2.3.