

Chute avec frottements quadratiques

Dans ce TD, on travaille sur un objet de masse m qui se déplace dans l'air en étant soumis :

— à son poids $-m.g.\vec{e}_z$ avec \vec{e}_z vertical vers le haut

— à une force de frottements $-\lambda \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$

1. Chute verticale avec frottements

On considère un grêlon de masse $m = 17\text{ g}$ qui tombe verticalement depuis une altitude $h = 600\text{ m}$ sans vitesse initiale. On prendra $\lambda = 9,2 \times 10^{-4}\text{ USI}$.

(a) Établir l'équation différentielle

$$\ddot{z} + k \cdot |\dot{z}| \cdot \dot{z} = -g \quad (1)$$

avec k à déterminer.

(b) Résoudre $z(t)$ par une méthode d'Euler. On prendra un pas de $0,1\text{ s}$ et une durée de simulation initiale de 20 s , qu'on ajustera ensuite pour que le grêlon arrive au sol.

(c) Que vaut la vitesse limite, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

(d) Tracer la trajectoire de phases $\dot{z}(z)$.

2. Tir balistique avec frottements

On reprend maintenant l'exemple du tir balistique vu en cours, avec une position initiale $\vec{OM}(0) = \vec{0}$ et une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_z$; on prendra un obus de masse $m = 7\text{ kg}$ tiré avec une vitesse initiale $v_0 = 1500\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et un angle $\alpha = 40^\circ$. Pour cet obus, $\lambda = 3 \times 10^{-3}\text{ USI}$.

(a) Établissez les équations :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{x} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{z} = -g \quad (3)$$

(b) Résolvez $x(t)$ et $z(t)$ par une méthode d'Euler avec un pas de $0,01\text{ s}$.

(c) Tracez la trajectoire, mesurez sa portée.

(d) Tracez la courbe donnant la portée de la trajectoire en fonction de l'angle.