TD n° 17

Calcul du travail des forces de pression

Le travail des forces de pression se calcule par l'intégrale

$$W = -\int_{début}^{fin} P_{ext}.dV \tag{1}$$

C'est l'occasion d'apprendre les méthodes de base de l'intégration numérique.

On sait que $\int_a^b f(x).dx$ représente l'aire sous la courbe de la fonction f (en grisé sur la figure de gauche). Pour approcher cette aire, plusieurs formules existent :

— dans la **méthode des rectangles** (deuxième figure), on découpe l'intervalle $[a;b]$ en N sous-intervalles de longueur $dx = \frac{b-a}{N}$; le i-ème sous-intervalle est donc $[a+i.dx; a+(i+1).dx]$ en numérotant les intervalles de 0 à $N-1$. Pour chaque sous-intervalle, on calcule la valeur de f à gauche du sous-intervalle, c'est-à-dire $f(a+i.dx)$, et on va dire que l'aire sous la courbe de f sur ce sous-intervalle vaudra l'aire du rectangle ainsi tracé, à savoir $f(a+i.dx)\times dx$. On obtient donc la formule

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i\right).dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + i.dx \tag{2}$$

On peut montrer que l'erreur commise varie comme $\frac{1}{N}$.

— Pour plus de précision, on peut choisir la hauteur du rectangle non point à gauche de l'intervalle, mais en son milieu : c'est la **méthode des rectangles au point milieu**. On a alors

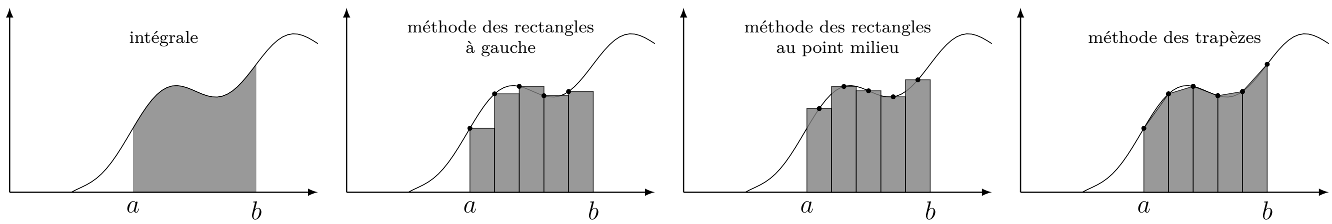
$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i\right).dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + \left(i+\tfrac{1}{2}\right).dx \tag{3}$$

Cette méthode a une erreur qui varie comme $\frac{1}{N^2}$, elle est donc meilleure.

— On peut aussi approximer l'aire non par un rectangle, mais un trapèze : c'est la **méthode des trapèzes**. On a alors

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f\left(x_i\right)+f\left(x_{i+1}\right)}{2}.dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + i.dx \tag{4}$$

Cette méthode est aussi précise que celle des rectangles au point milieu.



Remarque : en physique, on écrira $\delta W = -P_{ext}.dV$ le *travail infinitésimal*, qui correspond à l'aire d'un petit rectangle ; puis $W = \int \delta W$ qui interprète l'intégrale comme une somme : le travail total est la somme (infinie) des travaux infinitésimaux.

Autre remarque : la méthode des rectangle est en fait équivalente à appliquer une méthode d'Euler.

1. **Détente isotherme**

   On considère une mole de gaz qui se détend de façon réversible à la température constante $T = 150\,°\mathrm{C}$ de $V_1 = 2{,}5\,\mathrm{L}$ jusqu'à $V_2 = 35\,\mathrm{L}$.

(a) On suppose dans cette question que le gaz est modélisable par un gaz parfait.
Créez une fonction `PGP(V)` qui renvoie la pression pour un volume V donné, à la température choisie, puis appliquez la formule (3) avec $N = 100$ pour calculer le travail des forces de pression. Comparez avec la formule théorique : $W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

(b) Passez à 1000 rectangle et observer comment les deux valeurs se rapprochent

(c) On modélise maintenant le gaz par un gaz de Van der Waals vérifiant

$$P = \frac{nRT}{V - n.b} - a\frac{n^2}{V^2} \tag{5}$$

Pour l'air on prendra : $a = 135{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot m^6 \cdot mol^{-2}}$ et $b = 36{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$
Pour la vapeur d'eau on prendra : $a = 557{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot m^6 \cdot mol^{-2}}$ et $b = 31{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$
Définissez deux fonctions `Pair(V)` et `Peau(V)`, puis calculez le travail de la détente de ces deux gaz dans les mêmes conditions que précédemment. Commentez le résultat.

2. **Détente adiabatique réversible (AR)**
On considère une mole de gaz diatomique initialement à $T_1 = 500\,°\mathrm{C}$ dans $V_1 = 5\,\mathrm{L}$ qui se détend de façon AR jusqu'à T_2 et $V_2 = 50\,\mathrm{L}$.

(a) Calculez numériquement, pour un GP diatomique ($\gamma = 1,4$), la température finale T_{2Lap} puis le travail W_{2Lap} des forces de pression.

(b) Au cours de la détente AR, $\delta Q = 0$ et $P = P_{ext}$ donc le premier principe appliqué au gaz s'écrit $dU = -P.dV$. Or pour un GP diatomique, $dU = C_v dT$ avec $C_v = \frac{5}{2}nR$; donc $dT = -\frac{P}{C_v}dV$. La température lorsque le volume vaut V au cours de la détente vaut donc $T(V) = T_1 - \int_{V_1}^{V} \frac{P(T,V)}{C_v} dV$.
Pour calculer ainsi une primitive, on procède comme pour calculer une intégrale par méthode des rectangles (50000 rectangles ici), mais en stockant les sommes intermédiaires dans une liste ou un tableau. Générez ainsi trois tableaux :
— un tableau contenant les valeurs $V_i = V_1 + i\frac{V_2 - V_1}{N}$ du volume lors de la détente, pour i allant de 0 à N
— un tableau contenant les valeurs des températures T_i correspondantes (initialisez T_0, puis calculez les $T_{i+1} = T_i + \frac{P(T_i,V_i)}{C_v}.dV$)
— un tableau contenant les valeurs des pressions P_i correspondantes

Calculez alors le travail des forces de pression par une somme (soit la méthode des rectangles, $W = -\sum_{i=0}^{N-1} P_i dV$; ou, mieux encore, par la méthode des trapèzes, c'est plus précis), et comparez au résultat de la question précédente.

(c) Pour un gaz de Van der Waals, $dU = C_v dT + a\frac{n^2}{V^2}dV$ donc $dT = -\frac{P(T,V) + a\frac{n^2}{V^2}}{C_v}dV$. Calculez la température finale, la pression finale et le travail reçu, pour l'air modélisé comme un gaz de Van der Waals diatomique.

(d) Reprendre la comparaison entre le modèle du gaz parfait et le modèle de Van der Waals pour une détente AR de $1\,\mathrm{kg}$ d'air de $200\,\mathrm{bar}$, $20\,°\mathrm{C}$ à $1\,\mathrm{bar}$ (commencez par calculer le volume initial ; pour le volume final, on procèdera à tâtons ; la masse molaire de l'air vaut $29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$).