

Série de Fourier et filtrage

Nous allons simuler le filtrage d'une tension périodique par un filtre.

1. Filtre passe-bas d'ordre 2

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \frac{f}{f_0}}$ avec $H_0 = 2$ et $f_0 = 1500$ Hz.

- (a) Définissez sous Python une fonction `H_(f)` qui renvoie $\underline{H}$, puis deux fonctions `modH(f)` et `argH(f)` qui renvoient son module et sa phase.

Rappel : le module se calcule avec `np.abs` et la phase avec `np.angle`.

- (b) Tracez le diagramme de Bode de ce filtre entre 100 Hz et 10 kHz ; pour cela, il faudra tracer une courbe comme on le fait habituellement, mais avec deux différences :

- l'échelle horizontale doit être logarithmique ; cela s'obtient avec `plt.xscale("log")`
- les points de l'abscisse (tableau des fréquences) doivent se répartir de façon régulière sur cette échelle logarithmique ;, ce qui n'est pas le cas avec un `numpy.linspace` ; on utilisera donc la commande `numpy.logspace(2,5,1000)` qui crée 1000 point entre 10^2 et 10^5 régulièrement espacés sur l'échelle logarithmique (cette commande est équivalente à `10**numpy.linspace(2,5,1000)`).

Rappel : le logarithme en base 10 se calcule avec `np.log10()`.

- (c) On suppose qu'on met pour le moment en entrée une fonction $e_1(t)$ sinusoïdale d'amplitude 5 V, de fréquence $f = 500$ Hz et de phase nulle.

Écrivez la forme mathématique de $e_1(t)$ et tracez-la avec Python entre 0 et $3T$ (T la période).

- (d) Quelle est la forme mathématique de la sortie $s_1(t)$ (on gardera l'expression avec $|\underline{H}|$ et $\arg \underline{H}$) ?

Tracez alors sur le même graphique $s_1(t)$.

- (e) On met maintenant en entrée en signal dont la décomposition en série de Fourier est

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t) \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) (\cos(2\alpha k \pi) - 1)$$

$$\text{et } b_k = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) \sin(2\alpha k \pi) \text{ pour } \alpha = 0,8$$

Tracez le signal e_2 obtenu en faisant la somme, par exemple, des 25 premiers termes.

- (f) Tracez alors sur le même graphique la sortie correspondante.

Remarque : les sinus sont transformés au passage du filtre de la même manière que les cosinus.

2. Filtre dérivateur/intégrateur

Tracez de même l'effet d'un filtre dérivateur $\underline{H} = j \frac{f}{f_0}$ sur les dents de scie, puis d'un filtre intégrateur $\underline{H} = -j \frac{f_0}{f}$.

3. Vous pouvez reprendre la même chose avec un signal en créneaux de fréquence f . On admet qu'il se décompose en série de Fourier selon la formule

$$e_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2\pi(2k+1)ft) \quad \text{avec} \quad b_k = 5 \times \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

et on prendra au moins 100 harmoniques.