

Le pendule simple

On va étudier numériquement un pendule simple de longueur ℓ ; pour les AN on prendra $\ell = 180 \text{ cm}$, $m = 1 \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Reétablir l'équation vérifiée par l'angle θ du pendule :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

2. Résoudre cette équation à l'aide de `odeint` pour $\theta(0) = 1^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$.

Indication : pour la résolution numérique, les angles doivent être en radians.

Tracez $\theta(t)$, ainsi que le portrait de phase.

3. Calculez les tableaux donnant les énergies E_c , E_p (on prendra une énergie nulle en bas) et E_m . Tracez ces énergies en fonction du temps.

4. Tracez sur le même graphique les courbes $\theta(t)$ pour des angles $\theta(0)$ valant 10° , 20° , ..., 120° . Commentez.

5. Tracez $\theta(t)$ pour les CI : $\theta(0) = -60^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = +240^\circ/\text{s}$. Commentez.

6. Pour un mouvement périodique, la période du pendule est donnée en fonction de l'angle θ_{max} maximal par la formule

$$T = \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \sqrt{\frac{2\ell}{g(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} d\theta \quad (2)$$

Calculez cette période pour des angles θ_{max} allant de 10° à 170° à l'aide d'une méthode des rectangles. Tracez la courbe $T(\theta_{max})$ et vérifiez la compatibilité avec les simulations de la question 4.

7. On peut aussi essayer de mesurer la période directement sur les simulations. Écrivez une fonction `T_simul(thetamax)` qui simule par `odeint` la courbe de $\theta(t)$, puis mesure la période. Tracez cette période entre 10° et 170° et comparez avec la valeur donnée par l'intégrale.