

Le pendule simple (2)

On va continuer à étudier dans ce TD le pendule simple un peu modifié. On part toujours d'un pendule formé d'une masse m suspendue au bout d'un fil de longueur ℓ fixé en un point O . On prendra les valeurs numériques : $\ell = 1,80 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $f = 0,1 \text{ USI}$, $m = 500 \text{ g}$

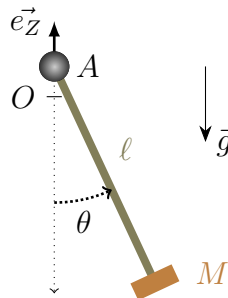
1. Pendule amorti

La masse m est soumise à une force de frottements $-f \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$.

- Établissez la nouvelle ED vérifiée par θ .
- Résolvez-la pour et comme CI : $\theta(0) = 40^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$, sur $10T_0$ ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$).
Tracez $\theta(t)$ ainsi que le portrait de phase.
- Idem pour $\theta(0) = 0^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 400^\circ/\text{s}$.

2. Pendule secoué

On secoue maintenant ce pendule ; plus exactement le point de fixation est mobile, on le note A et il bouge verticalement selon la loi $Z(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ avec $Z_0 = 5 \text{ cm}$. On a donc $\vec{OA} = Z(t) \cdot \vec{e}_Z$.



- Projetez $\vec{e}_Z$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Déduisez-en l'accélération $\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$ de la masse.
- On admet que la force de frottements vaut toujours $-f \cdot \ell^2 \cdot |\dot{\theta}| \cdot \dot{\theta}$. Montrez que θ obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{f \cdot \ell}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{Z_0 \omega^2}{\ell} \cos(\omega t) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

- Résolvez cette équation pour $\theta(0) = 1^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$, sur $50T_0$, avec $\omega = \omega_0$.
 - Même question avec $\omega = 2\omega_0$, puis $\omega = 3\omega_0$. Commentez.
 - Tracez la courbe de résonance (non linéaire).
3. Vous pouvez reprendre le même genre d'étude si on secoue maintenant horizontalement le point A .