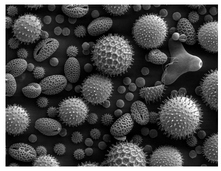
TD n° 24

Lentille magnétique



On étudie le passage d'un électron à travers une spire parcourue par un courant, dans le but de montrer qu'on obtient un effet de lentille, qui permet de construire des microscopes électroniques sur le même principe que les microscopes optiques.

La spire crée un champ magnétique qui s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(r,z) = B_r(r,z)\vec{e_r} + B_z(z)\vec{e_z} = \frac{3zrB_0}{2a^2\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{5/2}}\vec{e_r} + \frac{B_0}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2}}\vec{e_z} \tag{1}$$

L'écriture du PFD $m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ projeté sur les 3 axes de la base cylindrique permettent d'obtenir les équations (admises, mais c'est un bon exercice par ailleurs) :

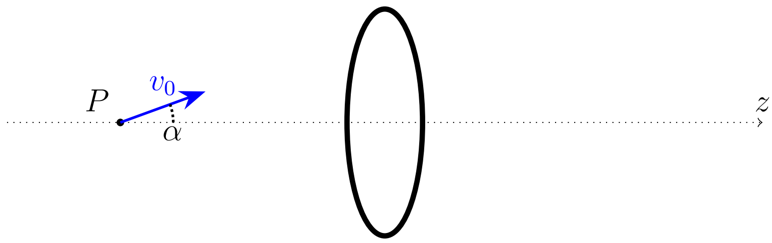
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e}{m} r\dot{\theta} B_z(z) \tag{2}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{e}{m}\dot{r}B_z(z) - \frac{e}{m}\dot{z}B_r(r,z) \tag{3}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m} r\dot{\theta} B_r(r,z) \tag{4}$$

avec $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

On va simuler le trajet d'une particule émise depuis un point P de l'axe ($r(0) \approx 0$) à une ordonnée $z(0) < 0$ partant avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec la direction $\vec{e_z}$. On remarquera que la seconde équation possède un problème en $r = 0$.



1. On considère une lentille telle que $B_0 = 40\,\mathrm{mT}$ et $a = 1\,\mathrm{mm}$. Définissez sous Python les constantes ainsi que les fonctions `Br` et `Bz`.
2. Résolvez le mouvement avec `odeint` pour les CI : $r(0) = \frac{a}{1000}$, $\theta(0) = 0\,\mathrm{rad}$, $z(0) = -100a$, $v_0 = 2 \times 10^7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $\alpha = 0{,}001\,\mathrm{rad}$, sur un temps total $\frac{200a}{v_0}$. Tracez la courbe $r(z)$ et interprétez en comparant avec l'effet d'une lentille convergente (placée en $z = 0$) sur un rayon lumineux.

   Remarque : lorsque la simulation amène le point trop près de l'axe, il y a un risque de divergence de $\ddot{\theta}$. On l'éviter en ajoutant la ligne `if r<a*1e-4: r=a*1e-4` dans la fonction dérivée.
3. On note Z l'abscisse de départ ; mesurez à l'aide du curseur l'abscisse Z' où l'électron revient sur l'axe. On définit la distance focale f' de la lentille par la relation $\frac{1}{f'} = \frac{1}{Z'} - \frac{1}{Z}$. Comment s'appelle cette loi ? Déterminez f'.

   Choisissez d'autres valeurs de Z et vérifiez que f' reste constant.
4. Tracez un ensemble de courbes partant de $z(0) = -100a$ et avec des angles variant entre $0{,}001\,\mathrm{rad}$ et $0{,}04\,\mathrm{rad}$. Observez en zoomant le déplacement du point de focalisation. Comment appelle-ton ce phénomène en optique ?
5. Tracez la trajectoire pour $z(0) = -100a$, $\alpha = 0{,}001\,\mathrm{rad}$ et B_0 variant de $25\,\mathrm{mT}$ à $100\,\mathrm{mT}$.
6. La théorie indique que la distance focale de la lentille vaut approximativement $f' \approx \frac{32m^2v_0^2}{3\pi a e^2 B_0^2}$. Vérifiez cette loi.