TD n° 25

Précession du périhélie de Mercure

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de $r(t)$, puis de $\theta(t)$, puis tracer la courbe correspondante.

La planète Mercure est proche du Soleil et est sensible au fait que le Soleil n'est pas exactement sphérique, mais aplati aux pôles comme la Terre. Par conséquent, on admet que la planète Mercure (de masse $m = 3{,}3 \times 10^{23}$ kg), est soumise à une force centrale qui dérive d'une énergie potentelle

$$U(r) = -\frac{GmM_S}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI la constante de gravitation universelle, $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg la masse du Soleil, et α une constante qui traduit l'aplatissement du Soleil ; sa vraie valeur est $8{,}7 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^2$ mais on prendra ici $\alpha = 2 \times 10^{19}\,\mathrm{m}^2$ pour que l'effet soit bien visible (les valeurs de décalage angulaire obtenues seront du coup exagérées).

1. À son périhélie (point le plus proche du Soleil), pris comme référence $t = 0$, Mercure se trouve à 46×10^6 km du Soleil et sa vitesse est de $59\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et orthoradiale (c'est-à-dire selon $\vec{e_\theta}$ en coordonnées polaires dans son plan de révolution).

   Déduisez-en $\dot{r}(0)$ et $\dot{\theta}(0)$ puis la valeur de la constante des aires C de Mercure.
2. Montrez que $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = cst$ en exprimant l'énergie potentielle effective $U_{eff}(r)$.
3. Déduisez-en l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par r.
4. Résolvez-la avec `odeint` pendant 1 an. Tracez $r(t)$ et commentez. Mesurez la période de révolution.
5. Quelle est la relation entre $\dot{\theta}$ et C et r ?

   On pourrait primitiver $\dot{\theta}$ à l'aide de la fonction `scipy.integrate.cumulative_trapezoid`, mais on va plutôt faire autrement : pour calculer θ, on considère que le système est décrit non plus par une équation différentielle, mais par un système de la forme $\begin{cases} \ddot{r} &= \dots \\ \dot{\theta} &= \dots \end{cases}$ qu'on peut résoudre par `odeint` en posant comme inconnues r, $\dot{r}$ et θ.

   Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de θ en plus des valeurs de r et $\dot{r}$; on posera $\theta(0) = 0$.
6. La fonction `plt.polar(theta,r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement et observez le décalage du périhélie à chaque tour.