

## Mouvement d'une bille dans un bol

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de  $r(t)$ , puis de  $\theta(t)$ , puis tracer la courbe correspondante.

On considère donc une bille de masse  $m$  se déplaçant sans frottements dans un bol parabolique d'équation en coordonnées cylindriques

$$z = \frac{r^2}{R}$$

avec  $R = 20 \text{ cm}$ ,  $O$  le bas du bol et  $z$  l'axe vertical ascendant. On tient compte du poids, avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Comme le profil du bol est invariant par rotation autour de  $Oz$ , la réaction passera toujours par l'axe  $Oz$ ; on admet ce résultat.

Montrez que le moment cinétique  $L$  de la bille par rapport à l'axe  $Oz$  est conservé.

2. On pose  $C = L/m$ . Exprimez  $C$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  et/ou leurs dérivées.
3. Justifier que le système est conservatif, et que

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{4r^2}{R^2} \right) \dot{r}^2 + U_{eff}(r) = cst$$

avec  $U_{eff}$  à exprimer en fonction de  $C$  et du reste.

4. On lance la bille depuis  $r(0) = 8 \text{ cm}$  avec une vitesse  $v(0) = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  orthoradiale (c'est-à-dire selon  $\vec{e}_\theta$ ). Que valent alors  $\dot{r}(0)$  et  $\dot{\theta}(0)$ ?

Calculez (dans un programme Python) sa constante  $C$ . Tracez  $u_{eff}(r) = U_{eff}(r)/m$  entre  $0,02R$  et  $R$ , et commentez.

5. À partir de  $E_m = cst$ , déduisez l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par  $r$ .
6. Résolvez-la avec `odeint` pendant 5s. Tracez  $r(t)$  et commentez.
7. Quelle est la relation entre  $\dot{\theta}$  et  $C$  et  $r$ ?  
Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de  $\theta$  en plus des valeurs de  $r$  et  $\dot{r}$ .
8. La fonction `plt.polar(theta, r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement.
9. Vous pouvez alors essayer avec d'autres valeurs initiales. Vous pouvez aussi essayer de tracer la trajectoire en 3D.