

Equation différentielle du second ordre

I. Equation différentielle sans second membre

On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b x = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + a r + b = 0$

Discriminant : $\Delta = a^2 - 4 b$

Discussion sur le signe du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, le polynôme caractéristique admet 2 racines réelles $r_1 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

L'équation différentielle admet pour solution $A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

Le système est stable si cette solution ne diverge pas, donc pour r_1 et r_2 négatifs, donc pour a et b positifs.

- Si $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique admet 1 racine unique, réelle : $r = -\frac{a}{2}$

L'équation différentielle admet pour solution $(\alpha t + \beta) e^{r t}$

Le système est stable si cette solution ne diverge pas, donc pour r négatif, donc pour a positif – avec $b = \frac{a^2}{4}$, donc $b > 0$ aussi.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -\frac{a}{2} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = -\frac{a}{2} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

L'équation différentielle admet pour solution $(A \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t) + B \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t)) e^{-at/2}$

Le système est stable si cette solution ne diverge pas, donc pour a positif. Par ailleurs $\Delta < 0 \Rightarrow b > 0$.

On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b x = 0$$

Le système décrit est stable si a et b sont positifs.

Si le système est stable, on écrira l'équation différentielle du second ordre sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 est la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité.

Discussion sur le signe du discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$$

- Si $\Delta > 0$, le polynôme caractéristique admet 2 racines réelles $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

L'équation différentielle admet pour solution $A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$. On parle de solution apériodique.

- Si $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique admet 1 racine unique, réelle : $r = -\omega_0$

L'équation différentielle admet pour solution $(\alpha t + \beta) e^{-\omega_0 t}$. On parle de solution apériodique critique.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

L'équation différentielle admet pour solution $\left(A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) \right) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$. On parle de solution pseudo-périodique.

On appelle pseudopulsation la quantité : $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

ω_0 est la pulsation de l'oscillateur harmonique que l'on aurait en l'absence du terme d'amortissement ($\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$)

Q traduit la qualité des oscillations observées : l'oscillateur harmonique correspond à un facteur de qualité infiniment grand. Si le facteur de qualité est assez grand on observera des oscillations amorties, d'autant moins amorties que Q est grand. Si Q est petit, il n'y a plus d'oscillations.

II. Equation différentielle du second ordre avec un second membre

On considère une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière dont la forme dépend du second membre.

En particulier, si le second membre est constant, on cherchera une solution particulière constante.

Si le second membre est sinusoïdal, la solution particulière le sera aussi.

Pour les autres cas, voir M. Ginoux.

(La méthode de la variation de la constante est en particulier à retenir).