Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

I. Rappel sur la dérivée d'une fonction d'une variable

Considérons une fonction f de la variable x dérivable : $f'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right)=\frac{df}{dx}$

On a aussi : $\boxed{df=f'(x)dx}$

II. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit f fonction des variables x et y.

Considérons d'abord que y reste constant ; f ne dépend plus que de la variable x et la variation de f correspondant à une variation dx de la variable x est : $df_x=\frac{\partial f}{\partial x}dx$ où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est **la dérivée partielle de f par rapport à x,** c'est-à-dire la dérivée de f(x,y) par rapport à la variable x quand l'autre variable est prise constante.

De même, supposons maintenant que x reste constant : f ne dépend plus que de y et la variation de f correspondant à une variation dy de la variable y est : $df_y=\frac{\partial f}{\partial y}dy$ où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est **la dérivée partielle de f par rapport à y.**

Maintenant, si x varie de dx et simultanément y varie de dy, on somme les deux contributions pour avoir la variation totale de f correspondante :

$df=df_x+df_y$

Soit encore $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Généralisation à une fonction f de n variables :

$$\boxed{df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i}$$