TP6 : Tri rapide
Preuve de correction

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Algorithme 1 : tri_rapide

Entrée(s) : T un tableau de n éléments
Sortie(s) : T' copie triée de T
1 **si** $n \leq 1$ **alors**
2   **retourner** ***une copie de*** T
3 **sinon**
4     $p \leftarrow$ un indice dans $[\![0, n-1]\!]$ `// choix du pivot`
5     $x \leftarrow T[p]$;
6     $T_{\leq} \leftarrow [T[i] \mid i \in [\![0, n-1]\!], i \neq p, T[i] \leq T[p]]$;
7     $T_{>} \leftarrow [T[i] \mid i \in [\![0, n-1]\!], i \neq p, T[i] > T[p]]$;
8   Trier récursivement $T_{\leq}$ et $T_{>}$, noter $T'_{\leq}$ et $T'_{>}$ les tableaux obtenus;
9     $T' \leftarrow$ concaténation de $T_{\leq}$, $[x]$ et $T_{>}$;
10   **retourner** T'

Montrons la correction de cet algorithme. Pour T un tableau, on note **tri_rapide**(T) le tableau obtenu en appliquant l'algorithme ci-dessus. Montrons par récurrence forte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : \forall T \text{ de taille } n, \textbf{tri\_rapide}(T) \text{ est une copie triée de } T$$

— Pour $n \leq 1$, tout tableau de taille n est trié, et donc pour tout T tableau de taille n, comme **tri_rapide**(T) est une copie de T, c'est bien une copie triée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Supposons la propriété P vraie pour tout $k < n$ et montrons qu'alors $P(n)$ est aussi vraie. Soit T un tableau de taille n.

  On note x le pivot choisit par l'algorithme du tri rapide sur T, et $T_{\leq}$ et $T_{>}$ les deux tableaux obtenus par partition selon ce pivot aux lignes 6 et 7. On a :

$$\textbf{tri\_rapide}(T) = \textbf{tri\_rapide}(T_{\leq}) + [x] + \textbf{tri\_rapide}(T_{>})$$

  Or, par HR, comme $T_{\leq}$ et $T_{>}$ sont de tailles strictement inférieures à n, **tri_rapide**$(T_{\leq})$ est une copie triée de $T_{\leq}$ et **tri_rapide**$(T_{>})$ est une copie triée de $T_{>}$. Donc, **tri_rapide**(T) est une copie de T (les éléments sont les même), et est bien trié car :

  — **tri_rapide**$(T_{\leq})$ est trié
  — $\max(\textbf{tri\_rapide}(T_{\leq})) \leq x$
  — $x < \min(\textbf{tri\_rapide}(T_{>}))$
  — **tri_rapide**$(T_{>})$ est trié

  Et ce pour tout T de taille n : $P(n)$ est vraie.

Ceci achève de montrer la correction partielle du tri rapide.