Calcul approché de la dérivée d'une fonction en un point

Rappelons le programme officiel :

Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.

I. Méthode

1) Valeur de la dérivée d'une fonction en un point

On rappelle la définition de la dérivée de la fonction f(x) en un point x0 :

$$f'(x_0) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En théorie, il suffit de prendre *h* très petit pour obtenir une grande précision dans le calcul de la dérivée. Toutefois, en prenant une valeur de h trop petite, on peut avoir de mauvaises surprises, car l'erreur relative sur le calcul de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ peut être grande et conduire à une mauvaise approximation de $f'(x_0)$.

Noter que h peut être positif comme négatif. Il est possible d'avoir une meilleure approximation de la valeur numérique de la dérivée par une approximation dite **centrée** :

$$f'(x_0) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Proposition de script :

```
def f(x) :
    return …

def deriv (f, x):
    h = 1e-6          # Valeur de h à adapter
    return ( f(x+h) – f(x-h) ) / (2*h)

fp = deriv (f, x0)          # valeur de x0 à préciser
print(fp)
```

Remarque : Il y a plus simple (mais ce n'est pas au programme explicitement)! Vous pouvez par exemple utiliser la fonction derivative dans la bibliothèque scipy.misc :

```
# On importe derivative
from scipy.misc import derivative

# On définit la fonction f(x)
def f(x) :
    return…

# point en lequel on calcule la dérivée
x0 = …

# calcul de la dérivée
```

```
dx =….            # C'est la largeur de l'intervalle dx sur lequel on calcule la dérivée (valeur à adapter)
solution = derivative (f, x0, dx)

print(solution)
```

2) Dérivation à partir de données (d'après revitron.free.fr)

a) Utilisation de listes

En général, un capteur de position fournit une grandeur analogique qui peut être récupérée dans un fichier. Ces données se présentent sous la forme de listes, les mesures sont généralement prises à intervalle de temps fixe T_e appelée **période d'échantillonnage**.

Exemple : Considérons une liste : $X = [x_1, x_2, ... x_N]$ décrivant la position X d'un mobile à intervalle de temps Te, on peut définir une liste V contenant la vitesse du mobile en utilisant :

- pour le premier point, la dérivée à droite : V[0] = (X[1] - X[0]) / Te;
- pour les points 2 à N-1, la dérivée centrée : V[n] = (X[n+1] - X[n-2]) / (2 * Te);
- pour le point N, la dérivée à gauche : V[N-1] = (X[N-1] - X[N-2]) / Te

Ce qui donne :

```
V = []
V[0] = ( X[1] - X[0] ) / Te
for n in range (2 , N-1)
        V[n] = ( X[n+1] - X[n-2] ) / (2 * Te)
V[N-1] = ( X[N-1] - X[N-2] ) / Te
```

La dérivée de données numériques s'accompagne généralement d'une augmentation sensible du bruit de mesure.

II. Exercice

On considère la chute d'une bille en acier de masse m = 50 g dans l'air. On relève sa position en cm toutes les 0,04 s , avec un axe descendant :
z = [0 ; -0,8 ; -3,1 ; -7,1 ; -12,6 ; -19,6 ; -28,3 ; -38,5 ; -50,2 ; -63,6 ; -78,5 ; -95 ; -113].

Calculer sa vitesse aux différentes dates.
Tracer son énergie potentielle, son énergie cinétique et son énergie mécanique au cours du temps .
Conclusion ?