

D17 du 23/04/24

Exo 1: Orbite de transfert

1) Système : point matériel P de masse m, dans le référentiel (Oxyz) supposé galiléen.

BatF: force d'attraction gravitationnelle $\vec{f} = -\frac{G\pi m \cdot \vec{O}\vec{n}}{r^2}$

$$\text{TNC en O: } \frac{d\vec{L}_O(P)}{dt} = \vec{O}\vec{P} \wedge \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O(P) = \vec{L}_0$$

$\Rightarrow$ [Conservation de P plan]

$$1) \vec{L}_O(P) = \vec{O}\vec{P} \wedge m \vec{v}(P) = r \vec{u} \wedge m (r \dot{\vec{u}} + r \dot{\phi} \vec{u} \otimes \vec{e}_\phi) = m r^2 \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$\text{Comme } \vec{L}_O(P) = \vec{L}_0, \quad r^2 \dot{\phi} = \text{cte}$$

On note $\vec{C} = r^2 \dot{\phi}$

$$3) E_P = -\frac{G\pi m}{r} \quad \text{or } r = OP$$

4) Th de la puissance mécanique: $\frac{dE_m}{dt} = 0$ car il n'y a qu'une force $\vec{f}$, $\vec{f}$, qui est conservative.

$$\Rightarrow E_m = \text{cte}$$

$$5) E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G\pi m}{r}$$

$$= m \frac{C^2}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \right] - G\pi m \quad \text{avec } \vec{v} = C \left(-\frac{dr}{dt} \vec{u} + r \vec{e}_\phi \right)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{car } E_m = \text{cte}$$

$$\Rightarrow m C^2 \left[\frac{dr}{dt} \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dr}{dt} \right] - G\pi m \frac{dr}{dt} = 0$$

2)

$$\frac{du}{dt} \left[C^2 \left(\frac{dr}{dt} + u \right) - G\pi \right] = 0$$

On écarte la solution $\frac{du}{dt} = 0$ (qui correspond à une trajectoire circulaire, solution aussi comprise dans la solution entre crochets).

$$\text{Alors } \frac{d^2 u}{dr^2} + u = \frac{G\pi}{C^2}$$

$\frac{G\pi}{C^2}$ est homogène à l'inverse d'une longueur.

$$\text{Notons } p = \frac{C^2}{G\pi} \quad \text{Alors } \frac{d^2 u}{dr^2} + u = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{p} + A \cos(\phi - \phi_0) = \frac{1}{p} [1 + A p \cos(\phi - \phi_0)]$$

$$\text{Posons } e = Ap. \quad \text{Alors } u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)]$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (Q \neq 0)$$

6) Dans un champ newtonien, le signe de E_m renseigne sur la trajectoire exacte: $E_m < 0 \Leftrightarrow$ ellipse (ou cercle)

Rem le résultat se donne directement; c'est du cours. Il a été établi par ailleurs dans le cours.

$$7) r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$8) E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G\pi m}{r}$$

③

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{G M m}{r}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{m v^2}{2 r^2}) - \frac{G M m}{r} \quad \text{car } r^2 \dot{\theta} = l \Rightarrow r \dot{\theta} = \frac{l}{r}$$

Aux positions extrêmes, $\dot{r} = 0$.

$$\Rightarrow E_m = \frac{m v^2}{2 r^2} - \frac{G M m}{r} \quad \text{avec } r = r_{\min} \text{ ou } r_{\max}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 + \frac{G M m}{r} - \frac{m v^2}{2 r} = 0$$

On reconnaît: $r_{\min} + r_{\max} = - \frac{G M m}{E_m} \Rightarrow E_m = - \frac{G M m}{2 a}$

$$g) \frac{a^3}{T^2} = \frac{G M}{4 \pi^2} \Rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{G M}}$$

10) Cas de la trajectoire circulaire de rayon r .

$$v = \sqrt{\frac{G M}{r}} \quad \text{et} \quad v = \frac{2 \pi r}{T} \Rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}}$$

11) Masse de Jupiter: $1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ } On peut considérer que
Masse d'Europe: $4,8 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ } le satellite Europe tourne
autour de Jupiter, quasi fixe dans le référentiel.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$



Rem Le tableau donne $r_{\min}$ et $r_{\max}$, assez proches: la trajectoire est presque circulaire.

$$11.b) \begin{cases} r_{\min} = \frac{p}{1+e} \\ r_{\max} = \frac{p}{1-e} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = 4,671 \cdot 10^{-3}$$

Rem La trajectoire est quasi-circulaire, comme signalé plus tôt. ④

$$\begin{cases} r_{\min} = \frac{p}{1+e} \\ r_{\max} = \frac{p}{1-e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+e = \frac{p}{r_{\min}} \\ 1-e = \frac{p}{r_{\max}} \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{p}{r_{\min}} + \frac{p}{r_{\max}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2 r_{\min} r_{\max}}{r_{\max} + r_{\min}} = 667 \text{ 965 km}$$

$$11.a) a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 1,96 \text{ UA}$$

$$11.b) E_m = - \frac{G M m}{2 a} = -3,5 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

$$11.c) E_m = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G M m}{r_p} \Rightarrow v_p^2 = 2 G M \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2 a} \right)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{r_p}{r_p}} = 33 \text{ km/s}$$

11.d) 3ème de Kepler sur l'ellipse de transfert: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G M_s}{4 \pi^2}$

$$\Rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_s}}$$

ΔT correspond à la durée pour parcourir la moitié de l'ellipse.
donc $\Delta T = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_s}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ s} = 25,9 \text{ jours}$

$$13) v_r = \sqrt{\frac{G M_s}{r_p}} = 29,8 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad v_{\pi} = \sqrt{\frac{G M_s}{r_{\pi}}} = 24,2 \text{ km/s}$$

Exo 2: Moteur Diesel

1) $C_{pm} = \frac{R}{\gamma - 1} = 23,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $\vee$ $C_{pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} = 32,1 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

2) En A: $T_A = 300 \text{ K}$ $\vee$ $P_A = 1,0 \text{ bar}$.

GP $\Rightarrow V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 1,0 \text{ L}$

En B $V_B = \frac{V_A}{\gamma} = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ L}$

A $\rightarrow$ B est une tps adiabatique du GP; on écrit P_γ relation de Laplace.

$P_B V_B^\gamma = P_A V_A^\gamma \Leftrightarrow P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma \Leftrightarrow P_B = P_A \gamma = 19,4 \text{ bar}$

Pour T_B , soit on écrit une relation de Laplace, soit l'équation d'état du GP:

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_B = T_A \gamma^{\gamma-1} = 647 \text{ K}$

ou $\left(\frac{P_B V_B}{P_A V_A} = \frac{nRT_B}{nRT_A} \right) \Rightarrow T_B = T_A \frac{P_B}{P_A} \frac{V_B}{V_A}$

En C $V_C = V_B = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ L}$

$P_C = \gamma P_B = 38,8 \text{ bar}$

GP: $T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 1295 \text{ K}$

En D: $P_D = P_C = 38,8 \text{ bar}$

GP: $T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 2590 \text{ K}$

$V_D = P V_C = 0,22 \text{ L}$

1

En E $V_E = V_A = 1,0 \text{ L}$

Relations de Laplace entre D et E:

$P_D V_D^\gamma = P_E V_E^\gamma \Leftrightarrow P_E = P_D \left(\frac{V_D}{V_E} \right)^\gamma = 5,0 \text{ bar}$

$T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_E = T_D \left(\frac{V_D}{V_E} \right)^{\gamma-1} = 1529 \text{ K}$

Rem II est pratique de regrouper les résultats au même endroit dans un tableau.

Points	A	B	C	D	E
V (L)	1,0	0,11	0,11	0,22	1,0
P (bar)	1,0	19,4	38,8	38,8	5,0
T (K)	300	647	1295	2590	1529

3) A $\rightarrow$ B est une tps adiabatique d'un GP: $Q_{AB} = 0$
 1^{er} principe $\Rightarrow W_{AB} = \Delta U_{AB} \Leftrightarrow W_{AB} = n C_{vm} (T_B - T_A) = 330 \text{ J}$

B $\rightarrow$ C est une tps isochore.

Il n'y a que des forces pressantes $\Rightarrow W_{BC} = 0$

1^{er} principe $\Rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} \Leftrightarrow Q_{BC} = n C_{vm} (T_C - T_B) = 616 \text{ J}$

C $\rightarrow$ D est une tps isochore.

Il n'y a que des forces pressantes: $W_{CD} = -P_C (V_D - V_C) = -430 \text{ J}$

1^{er} principe $\Rightarrow Q_{CD} = \Delta U_{CD} \Leftrightarrow Q_{CD} = n C_{pm} (T_D - T_C) = 1661 \text{ J}$

2

3

$D \rightarrow E$ est une tps adiabatique: $Q_{DE} = 0$

1^{er} principe: $W_{DE} = \Delta U_{DE} \Rightarrow W_{DE} = n C_{vm} (T_E - T_D) = -1038 \text{ J}$

$E \rightarrow A$ est une tps isochore.

Il n'y a que des forces pressantes: $W_{EA} = 0$

1^{er} principe $\Rightarrow Q_{EA} = \Delta U_{EA} \Leftrightarrow Q_{EA} = n C_{vm} (T_A - T_E) = -1168 \text{ J}$

4) $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EA} = -1138 \text{ J}$

Rem. On a bien $W < 0$: cycle parcouru en sens horaire! Noter!

5) $Q_c = Q_{BC} + Q_{CD} = 2277 \text{ J}$ énergie thermique effectivement reçue.

$Q_f = Q_{EA} = -1080 \text{ J}$ énergie thermique en fait cédée

6) Rendement: $\eta = -\frac{W}{Q_c} = 50,0 \%$