Exercice 5. *Nombre chromatique*

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. Une coloration de G est une fonction $c : S \to \mathbb{N}$ de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. On note χ_G le nombre chromatique de G, c'est à dire le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer G.

Question 1. On note ω_G le nombre de clique de G, c'est à dire la taille de la plus grande clique de G. Donner un lien entre χ_G et ω_G.

Question 2. On note Δ_G le degré maximal d'un sommet de G. Donner un lien entre χ_G et Δ_G.

Question 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner le nombre chromatique d'un graphe cyclique à n sommets.

Question 4. Montrer que pour c une coloration minimale de G, il existe un sommet de chaque couleur qui est adjacent à toutes les autres couleurs.

On pourrait penser que le nombre chromatique d'un graphe est directement lié à la taille des cliques qu'il contient. En fait, on peut trouver des graphes de nombre chromatique arbitrairement grand qui ne contiennent même pas de triangle, c'est à dire de 3-clique !

Étant donné $G = (S, A)$ un graphe non-orienté, avec $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, on considère $D(G)$ le graphe tel que :

- L'ensemble de ses sommets est $\{s_1, \ldots, s_n, s'_1 \ldots s'_n, t\}$ où les s'_i et t sont des nouveaux sommets.
- L'ensemble de ses arêtes est $A \cup \{(s_i, s'j) \mid (s_i, s_j \in A)\} \cup \{(s'_i, t) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$

Question 5. Dessiner un graphe G quelconque à 5 sommets, puis dessiner $D(G)$.

Question 6. Montrer que si G ne contient pas de triangle, alors $D(G)$ non plus.

Question 7. Montrer que $\chi_{D(G)} = \chi_G + 1$.

Question 8. En déduire qu'il existe des graphes sans triangles de nombre chromatique arbitrairement grand.