Analyse dimensionnelle

I. Equation aux dimensions

On appelle équation aux dimensions une équation qui lie la dimension d'une grandeur à celles des grandeurs de base.

La dimension d'une grandeur physique X est notée dim(X).
L'unité d'une grandeur physique X est notée entre crochets : $[X]$ ou donnée par son symbole : m, s, N, Pa.

Dans les exemples suivants, on cherchera l'équation aux dimensions reliant les trois grandeurs proposées et l'on introduira les unités dérivées.

Exemple 1 : L'unité d'une force
La seconde loi de Newton donne la relation entre la force, la masse et l'accélération : $\vec{f} = m\vec{a}$
L'unité utilisée pour les forces est le newton, symbole N. Exprimer 1 N dans le système USI.

Remarque : On rencontre fréquemment les notations suivantes :
dim(masse) = M
dim(longueur) = L
dim(temps) = T
Je vous recommande la prudence, le risque est grand de faire des confusions comme M = mètre au lieu d'avoir M = masse, ou encore : T = tension = force au lieu de T comme temps. La première notation présentée est plus lourde, mais sans risque de confusion.

Exemple 2 : L'unité de la pression
La pression P est la composante normale F de la force s'exerçant sur une surface donnée S.
La pression s'exprime en *pascal* (Pa) : Exprimer 1 Pa dans le système USI.

Exemple 3 : L'unité de l'énergie E
L'énergie s'exprime en *joule* (J) : Exprimer 1 J dans le système USI.

Exemple 4 : L'unité des charges électriques
L'intensité I du courant électrique correspond à la quantité de charge électrique q traversant un conducteur pendant un temps t : $I = \frac{q}{t}$. En déduire l'unité de la charge électrique (en coulomb, notée C) dans le système USI.

II. Analyse dimensionnelle comme outil de prédiction

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs dimensionnées indépendantes (par exemple A, B, C) caractéristiques du problème, alors X peut probablement se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{X = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}}$$

La constante k est sans dimension; les exposants α, β et γ se déterminent par analyse dimensionnelle de l'expression ci-dessus.

Exemple 5 :
On s'intéresse à un ressort horizontal de constante de raideur *k* (en kg/s^2). Une extrémité est fixe et notée O. A l'extrémité libre, on fixe une masse ponctuelle *m*. On écarte à une date donnée l'extrémité mobile de la quantité *a*, on lâche la masse sans vitesse initiale. On constate que la masse oscille de manière régulière. On suppose que la période T_0 des oscillations dépend de la constante de raideur k, de la masse m et de l'élongation initiale *a* .
Proposer une expression de T_0 en fonction de k, m et a.

Exemple 6 : Vitesse d'un satellite en orbite circulaireOn se rappelle que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire autour de la Terre a une vitesse qui dépend de la masse M de la Terre, du rayon R de son orbite et de la constante gravitationnelle. Quelle est l'expression exacte ?

Remarques et conseils :

On ne peut comparer deux grandeurs physiques entre elles que si elles ont la même dimension.
Par exemple, on peut comparer 2 distances entre elles, mais pas une distance et une masse.

Deux grandeurs physiques de même dimension sont dites homogènes.

0 est homogène à tout ; écrire X = 0 a du sens quelle que soit la dimension de X.

On demandera certainement dans un exercice ou un problème de déterminer une grandeur :

- **il faudra donner son expression littérale ,**
- **il faudra faire l'application numérique (en donnant l'unité),**
- **il faudra préciser l'unité.**

Vérifier la bonne cohérence du point de vue des dimensions de l'expression obtenue, c'est-à-dire que l'on a la même unité des deux côtés de l'égalité : c'est *l'homogénéité* du résultat.

Vérifiez que la valeur numérique obtenue est cohérente (par exemple, on ne peut pas avoir de vitesses supérieures à celle de la lumière dans le vide, soit approximativement $3.\ 10^8$ m. s^{-1}).

Une valeur numérique sans l'unité est un résultat incorrect et ne donnera aucun point en DS.

Vérifiez la cohérence mathématique en regardant les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.