TD4: Complexité asymptotique

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Pour les questions marquées **(*)**, des indications figurent à la fin du TD, pour vous aider si vous bloquez.

Exercice 1.

Comparez les comportements asymptotiques des suites ci-dessous, en les plaçant sur une fresque horizontale, en plaçant une suite de *t.g.* u_n à gauche d'une suite de *t.g.* v_n si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. Indiquez quels $\mathcal{O}$ sont en fait des Θ.

a) n	b) $\log_2(n)$	c) $\sqrt{n}$	d) n^{n^n}
e) $n\log_5(n)$	f) e^n	g) e^{n^2}	h) 3
i) $1+(-1)^n$	j) $n!$	k) $ln(n^3)$	l) $n^{\log(n)}$
m) n^n	n) n^2-2n+8	o) $(\log_2 n)^7+n$	p) $\pi^{\frac{n}{2}}$

Exercice 2.

Q1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive **croissante**. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i = \mathcal{O}(nu_n)$$

et trouver un contre exemple si l'on ne demande plus que la suite soit croissante.

Q2. Trouver une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive telle que $u_n = \mathcal{O}(u_{n+1})$ **mais** $u_n \neq \Theta(u_{n+1})$.

Exercice 3.

On considère le problème suivant : Étant donné une liste de valeurs pour le cours d'une action donnée, quel est le meilleur moment pour acheter et pour vendre ?

Q1. Formaliser le problème sous une forme plus mathématique, en écrivant la spécification d'un algorithme pour le résoudre.

Q2. Donner un algorithme naïf et donner sa complexité.

Q3. **(*)** Trouver un algorithme en $\mathcal{O}(n)$.

Exercice 4.

Un concepteur de téléphones souhaite tester la résistance de ses produits, particulièrement la résistance aux chutes. Il loue un immeuble de N étages, et veut déterminer le plus haut étage duquel il peut jeter un téléphone sans que celui-ci se casse. Lorsqu'un téléphone survit à une chute, on considère qu'il est intact et qu'il peut être réutilisé pour un autre test.

Dans ce problème, on doit donc se préoccuper de deux ressources :

- Le temps, i.e. le nombre de lancers totaux faits
- Le nombre de téléphones cassés.

On supposera qu'il existe toujours un étage auquel les téléphones cassent.

Q1. On représente l'immeuble par un tableau T de N booléens : la case $T[i]$ contient 0 si le téléphone ne casse pas à l'étage i, et 1 s'il casse. Formaliser le problème que l'on cherche à résoudre en complétant l'énoncé :

"Étant donné un tableau de booléens T de taille N, on cherche ...".

Dans cette modélisation, à quoi correspond le fait de lancer un téléphone ? de casser un téléphone ?

Q2. Donnez un algorithme cassant au plus un téléphone permettant de déterminer l'étage limite. Quel est sa complexité en temps ?

Q3. On propose la méthode suivante, appelée **recherche par dichotomie** : on délimite une zone à tester sur l'immeuble, qui couvre initialement tous les étages. On teste l'étage du milieu de cette zone, puis selon le résultat, on réduit la zone de recherche. On itère ainsi jusqu'à avoir identifié l'étage limite.
Appliquer la méthode décrite sur le tableau suivant, et compter le nombre de lancers, et le nombre de téléphone cassés :

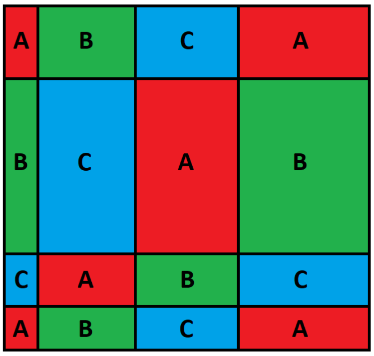
$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]$$

Q4. (*) Formaliser la recherche par dichotomie en écrivant un algorithme en pseudo-code. Prouver sa correction, et montrer que sa complexité en temps est $\mathcal{O}(\log(N))$. Combien de téléphone cette méthode casse-t-elle au plus ?

Q5. On suppose maintenant qu'on dispose d'un immeuble infini. On ne peut donc plus faire de lancer depuis le "dernier étage". Donnez un algorithme le plus efficace possible ne cassant que 2 téléphones. On exprimera la complexité en fonction de n l'étage à trouver.

Exercice 5.

On considère le problème suivant : On veut peindre le sol de la cuisine avec trois couleurs A, B, C selon le principe suivant :
On se donne n largeurs $l_0, l_1 \dots l_{n-1}$ et m longueurs $L_0, L_1 \dots L_{m-1}$, telles que la cuisine est de largeur $l_0 + \cdots + l_{n-1}$ et de longueur $L_0 + \cdots + L_{m-1}$ et on veut créer un motif quadrillé selon les l_i, L_j, où chaque case (i, j) est colorée selon la valeur de $i + j$ modulo 3 : on utilise la couleur A (resp. B, C) pour les cases telles que $i + j = 0[3]$ (resp. 1, 2). Exemple ci-contre.



On se demande la quantité exacte de peinture nécessaire, i.e. la surface couverte par chaque couleur. Donner un algorithme permettant de calculer la surface couverte par chacune des trois couleurs et donner sa complexité en fonction de n et m.

Indications

— Exercice 3, question 3 : si l'on suppose que l'on vend à l'instant i, quel est le meilleur moment pour avoir acheté ? Comment conserver cette information au fur et à mesure qu'on parcourt le tableau ?

— Exercice 4, question 4 : Pour écrire l'algorithme, on pourra utiliser deux variables A et B délimitant la zone de recherche. Pour montrer la complexité, cherchez un variant de boucle le plus petit possible afin de borner le nombre de passages.