# Structures de données

Guillaume Rousseau
MP2I Lycée Pierre de Fermat
guillaume.rousseau@ens-lyon.fr

9 décembre 2024

# 1 Introduction

Nous avons déjà rencontré deux structures de données assez simples :

— Les tableaux

— Les structs C

Ces deux types d'objets permettent de stocker des données d'une manière **structurée** : les tableaux comme les structs sont munis d'opérations bien spécifiques pour écrire ou lire des valeurs : accès à une case, à un attribut...

**Définition 1.** Une ***structure de données abstraite*** est la description d'un ensemble de données et des opérations que l'on peut y appliquer. Elle est caracatérisée par sa ***spécification*** :

— Son type/format, c'est à dire le genre d'informations que l'on peut enregistrer.

— Ses **opérations**, c'est à dire la manière dont on interagit avec la structure, la manière dont on y lit, écrit et modifie des données.

**Exemple 1.** Un tableau d'éléments de type `T` est une structure de données abstraite. C'est une suite finie d'éléments de type `T`, et ses opérations sont :

— Créer un tableau d'une taille donnée

— Écrire à la $i$-ème case du tableau

— Lire la $i$-ème case du tableau

— Obtenir la taille du tableau

En C, si l'on utilise directement les tableaux fournis par le langage, comme on l'a fait jusqu'à maintenant, on ne peut pas obtenir la taille d'un tableau donné, on doit s'en rappeler dans une variable à part. On peut néanmoins implémenter notre propre version des tableaux, en utilisant les structs :

```
1 struct tableau{
2   int taille;
3   float* valeurs;
4 };
5 typedef struct tableau tableau_t;
```

Ensuite, on peut implémenter les opérations données par la spécification des tableaux :

```
1 tableau_t* creer_tab(int taille){
2   tableau_t* res = malloc(sizeof(tableau_t));
3   res->taille = taille;
4
5   res->valeurs = malloc(taille*sizeof(float));
6   for (int i = 0; i < taille; i++){
7     res->valeurs[i] = 0;
8   }
9 }
```

(On choisit arbitrairement de mettre tous les éléments à 0 initialement.)

```
1 void ecrire(struct tableau_t* t, int i, float x){
2   assert(0 <= i && i < t->taille);
3   t->valeurs[i] = x;
4 }
```

On remarque qu'implémenter nous même la structure de tableau permet de rajouter une couche de sécurité : on vérifie systématiquement qu'on accède bien à une case valide du tableau.

```c
float lire(struct tableau_t* t, int i){
  assert(0 <= i && i < t->taille);
  return t->valeurs[i];
}
```

```c
int taille(struct tableau_t* t){
  return t->taille;
}
```

En ayant écrit les fonction précédentes, on a **implémenté** la structure de données abstraite appelée “tableau”. On dit que l'on a créé une **structure de données concrètes**.

On a ***implémenté*** la structure de données abstraite de tableau, et créé une structure de données concrète.

**Définition 2.** Une ***structure de données concrète*** est l'implémentation d'une structure de données abstraite.

Dans un programme, lorsque l'on **implémente** une structure de données, on prend le point de vue de la SDC : on choisit une implémentation, on crée les opérations concrètes. Cependant, lorsque l'on **utilise** une structure de données dans du code, on considère la structure abstraite.

Par exemple, avec la structure de tableaux implémentée plus haut, on pourrait uniquement utiliser les 4 fonctions :

```c
tableau_t* t_1 = creer_tableau(5); // VALIDE
tableau_t* t_2 = malloc(sizeof(tableau_t)); // INVALIDE

float x = lire(t_1, 2); // VALIDE
float y = t_1->valeurs[2]; // INVALIDE
```

En pratique, il sera courant d'implémenter une structure de données en écrivant un couple de fichiers `.h/.c`. Le fichier header ne contient que les déclarations, y compris pour la structure, qui est déclarée sans remplir les attributs :

```c
typedef struct tableau tableau_t;

// Crée un tableau de taille `taille` non initialisé
tableau_t* creer_tab(int taille);

// Renvoie la case i de t. Précondition: i est un indice valide
float lire(struct tableau_t* t, int i);

// Stocke x dans la case i de t. Précondition: i est un indice valide
void ecrire(struct tableau_t* t, int i, float x);

// Renvoie le nombre de cases de t
int taille(struct tableau_t* t);
```

Le fichier C contiendra les définitions de la structure et des fonctions. Ainsi, les fichiers C qui utiliseront la structure n'auront aucun moyen d'accéder aux attributs de la structure, car ils n'ont accès qu'au fichier header. On parle d'utilisation en **boîte noire**, car on utilise la structure sans connaître son fonctionnement interne.

La documentation d'une structure de données concrète est très importante, car c'est elle qui explique à l'utilisateur comment utiliser les différentes opérations. Autrement dit, la documentation **est** la spécification. Plus que jamais, lorsque l'on implémente des structures de données, on doit ***commenter*** le code.

**Définition 3.** Dans la suite, on distinguera trois familles d'opérations possibles pour les SDA :

— Les **constructeurs**, qui servent à créer et initialiser une structure

— Les **accesseurs**, qui permettent de lire une information dans la structure

— Les **transformateurs**, qui permettent de modifier la structure : en changeant une valeur, en ajoutant ou supprimant un élément, etc...

Certaines opérations peuvent être dans deux (ou plus) familles à la fois.

Par exemple pour notre implémentation des tableaux :

— `creer_tab` est un constructeur ;

— `lire` est un accesseur ;

— `ecrire` est un transformateur ;

— `taille` est un accesseur.

**Destructeur** Lorsque l'on crée une SDC, on rajoute parfois un quatrième type d'opérations, les **destructeurs**, qui servent à détruire une structure, et libérer toutes les ressources qu'elle utilisait.
On pourrait rajouter un destructeur `free_tab` aux tableaux comme suit :

```
1 void free_tab(struct tableau* t){
2   free(t->valeurs);
3   free(t);
4 }
```

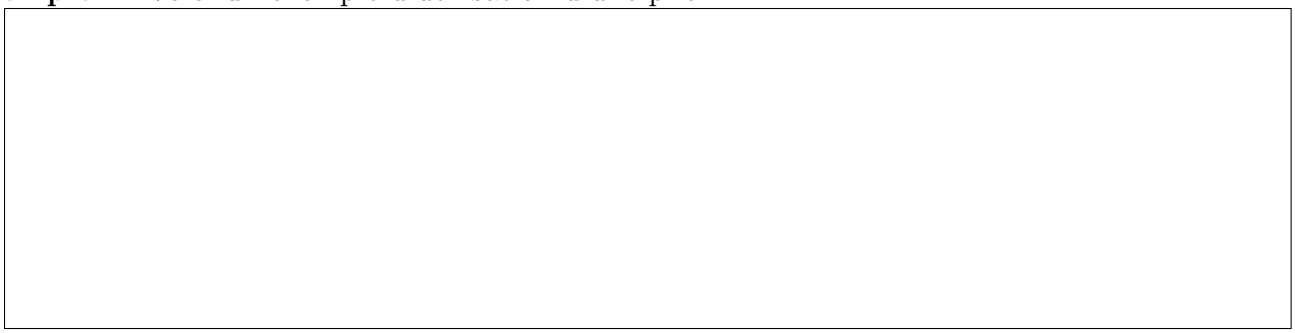
Dans la suite du chapitre, on fixe `T` un type, et on considèrera des structures permettant de stocker des éléments de ce type. On omettra généralement les destructeurs dans la description des SDA, mais on pensera bien à les programmer pour les SDC !

# 2 Pile

Une pile est une structure de données se comportant comme une pile d'assiette : on peut enlever l'assiette du dessus, ajouter une assiette au sommet de la pile, mais il est difficile d'insérer ou de retirer une assiette au milieu.

Cette structure fonctionne donc selon le principe "Dernier arrivé, premier sorti", ou ***LIFO*** (Last In First Out) : la dernière donnée que l'on ajoute sera toujours la première donnée que l'on devra retirer : c'est le **sommet** de la pile. Inversement, la première valeur que l'on ajoute dans une pile ne pourra être lue qu'une fois que toutes les valeurs suivantes ont été enlevées : c'est la **base** de la pile.

**Exemple 2.** Voici un exemple d'utilisation d'une pile :



## A Structure de données abstraite

Une pile représente une suite finie d'éléments de type $\boxed{\texttt{T}}$, dont la taille peut varier. Ses opérations sont :

- **pile_vide**() crée une nouvelle pile vide (**Constructeur**) ;
- **empiler**$(P, x)$ ajoute un nouvel élément $x$ sur le sommet de la pile $P$ (**Transformateur**) ;
- **depiler**$(P)$ enlève le sommet de la pile, et le renvoie (**Transformateur** et **Accesseur**) ;
- **est_vide**$(P)$ détermine si la pile $P$ est vide (**Accesseur**).

**Remarque 1.** Dans certaines définitions, on a deux opérations séparées pour lire le sommet de pile et pour le supprimer. Ici, l'opération de dépilage est à la fois un accesseur et un transformateur.

**Exercice 1.** Exécuter l'algorithme suivant sur le tableau $T = [3, 1, 4, 1, 5]$ : que fait-il ?

**Algorithme 1 :** ???

**Entrée(s) :** $T$ un tableau de taille $n$
**Sortie(s) :** ???

```
1 P ← pile_vide();
2 pour i = 0 à n − 1 faire
3 |  empiler(P, T[i]);
4 i ← 0;
5 tant que non est_vide(P) faire
6 |  T[i] ← depiler(P);
7 |  i ← i + 1;
```

## B Implémentation par tableau

Pour commencer, on s'autorise à avoir une taille limite pour la pile. On se fixe $N_{max}$ un entier, et on implémente une pile avec un tableau de taille $N_{max}$. On stocke dans la SDC le nombre d'éléments actuel :

```
#define Nmax 10000
struct pile{
  int nb_elem;
  T* tab;
};
typedef struct pile pile_t;
```

Le principe de cette implémentation est que pour une pile `p`, seuls les `p->nb_elem` premiers éléments de `p->tab` ont un sens, et les cases d'indice `p->nb_elem` et au-delà peuvent contenir n'importe quoi. La case `p->tab[0]` contient la base de la pile, et `p->tab[p->nb_elem-1]` contient le sommet de la pile. Pour empiler, on devra donc écrire dans la case `p->tab[p->nb_elem]` et incrémenter le nombre d'éléments.

```
pile_t* pile_vide(){
  pile_t* p = malloc(sizeof(pile_t));
  p->nb_elem = 0;
  p->tab = malloc(Nmax*sizeof(T));
  return p;
}

bool est_vide(pile_t* p){
  return (p->nb_elem == 0);
}

void empiler(pile_t* p, T x){
  assert(p->nb_elem < Nmax); // impossible d'empiler sur une pile pleine
  p->tab[p->nb_elem] = x;
  p->nb_elem++;
}

T depiler(pile_t* p){
  assert(!est_pile_vide(p)); // impossible de dépiler une pile vide
  T res = p->tab[p->nb_elem-1];
  p->nb_elem--;
  return res;
}

void free_pile(pile_t* p){
  free(p->tab);
  free(p);
}
```

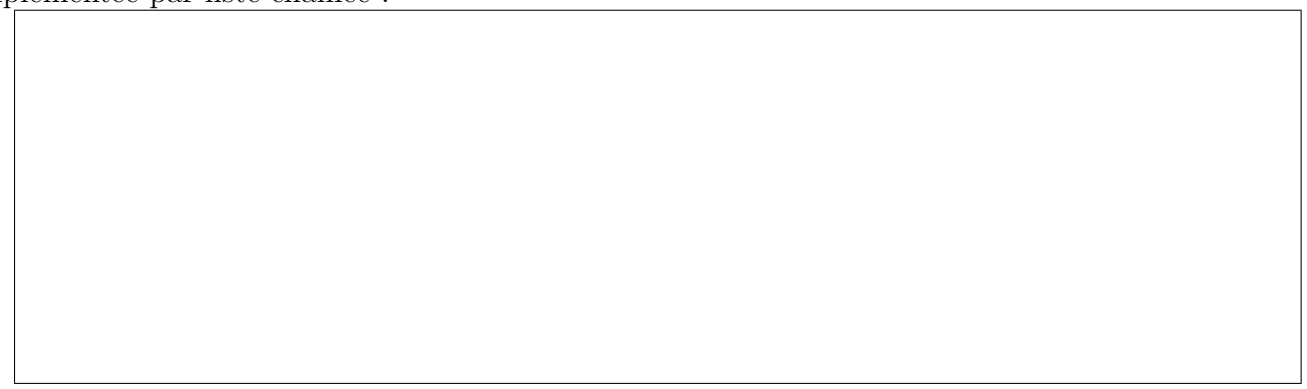
Toutes ces opérations ont une complexité $\mathcal{O}(1)$.

## C Implémentation par liste chaînée

Cette implémentation permet d'avoir des piles pouvant grandir à l'infini, dans la limite de la mémoire de l'ordinateur. Une liste chaînée est composée de maillons, et chaque maillon contient un élément ainsi qu'une référence vers le maillon suivant :

```
1 typedef struct maillon {
2   T elem;
3   struct maillon* suivant;
4 } maillon_t;
5
6
7 typedef struct pile{
8   maillon_t* sommet;
9 } pile_t;
```

**Exemple 3.** Voici une pile abstraite et le schéma qu'on aurait en mémoire avec une pile implémentée par liste chaînée :

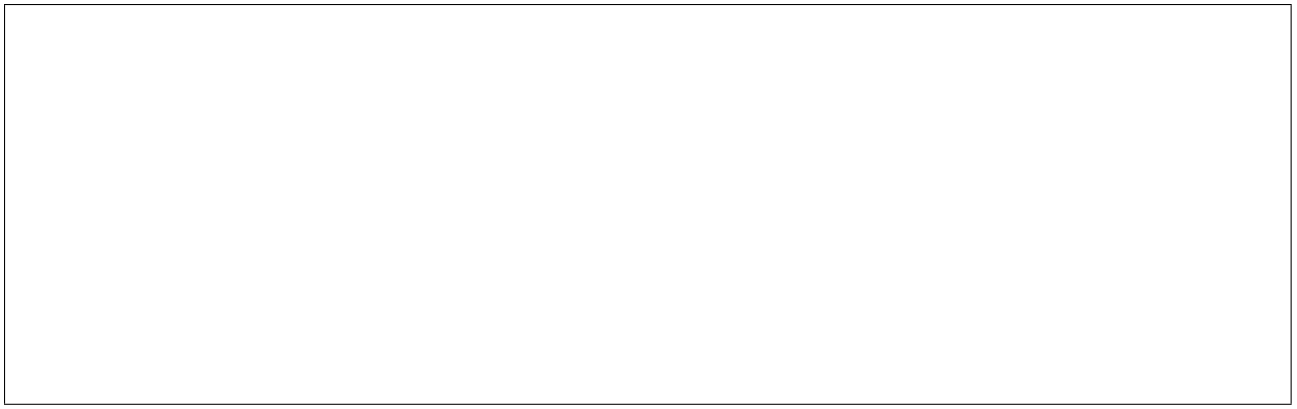


Dans cette implémentation, on utilise le pointeur `NULL` pour signaler qu'un maillon est le dernier, i.e. que c'est la base de la pile. Implémentons les différentes opérations.

**Création de pile** Une pile vide ne contient aucun maillon :

```
1 pile_t* pile_vide(){
2   pile_t* p = malloc(sizeof(pile_t));
3   p->sommet = NULL;
4   return p;
5 }
```

**Empiler un élément au sommet** Pour empiler un élément, on crée un nouveau maillon contenant l'élément, puis il faut raccorder les pointeurs de la pile et du nouveau maillon pour satisfaire le schéma suivant :



En tenant compte de tous les liens qui sont créés / modifiés / supprimés, on obtient le code suivant :

```
1  void empiler(pile_t* p, T x){
2    maillon_t* nouv_sommet = malloc(sizeof(maillon_t));
3
4    nouv_sommet->elem = x;
5    nouv_sommet->suivant = p->sommet; // nouveau sommet pointe vers l'ancien
6    p->sommet = nouv_sommet;
7  }
```

Complexité : $\mathcal{O}(1)$

**Déterminer si une pile est vide** Une pile est vide si et seulement si son sommet est le pointeur nul :

```
1  bool est_pile_vide(pile_t* p){
2    return (p->sommet == NULL);
3  }
```

Complexité : $\mathcal{O}(1)$

**Dépiler le sommet de pile** Cette opération est essentiellement l'inverse de celle d'empilage : on doit extraire le maillon correspondant au sommet et recoller les liens. Il ne faut pas oublier de libérer la mémoire du maillon extrait afin d'éviter les fuites mémoire :

```
1  T depiler(pile_t* p){
2    assert(!est_pile_vide(p));
3
4    T res = p->sommet->elem;
5    maillon_t* nouveau_sommet = p->sommet->suivant;
6
7    free(p->sommet);
8    p->sommet = nouveau_sommet;
9    return res;
10 }
```

Complexité : $\mathcal{O}(1)$

**Afficher une pile** Lorsqu'on implémente une structure en C, il peut être utile d'ajouter des opérations qui ne font pas partie de la SDA, mais qui sont utiles pour le débug.
Pour afficher une pile, on parcourt tous ses éléments et on les affiche un par un. Si on le fait dans l'ordre naturel, on affichera le sommet en premier :

```
1 void print_pile(pile_t* p){
2   maillon_t* m = p->sommet;
3   while (m != NULL){
4     afficher m->elem; // dépend du type des données stockées
5     m = m->suivant;
6   }
7 }
```

Quand on manipule des listes chaînées, ce type de boucles revient souvent. En C, il est assez courant d'écrire ces boucles avec des for plutôt que des while, comme suit :

```
1 void print_pile(pile_t* p){
2   for(maillon_t* m = p->sommet; m != NULL; m = m->suivant){
3     // afficher m->elem
4   }
5 }
```

**Libérer une pile** On parcourt la liste chaînée pour libérer un à un les maillons. Il faut faire attention à l'ordre des opérations : une fois qu'on a libéré un maillon, on ne peut plus accéder à ses attributs.

```
1 void free_pile(pile_t* p){
2   maillon_t* m = p->sommet; // prochain maillon à libérer
3   maillon_t* prec = NULL; // référence vers le maillon précédent
4   while (m != NULL){
5     prec = m;
6     m = m->suivant;
7     free(prec);
8   }
9 }
```

Complexité : $\mathcal{O}(n)$

## D Utilisation de la SDA

Supposons que l'on a écrit un header `pile.h` avec la spécification de la SDA de pile. Nous avons vu deux implémentations, supposons donc que l'on a aussi créé deux fichiers indépendants `pile_tab.c` et `pile_chaine.c` implémentant chacun les opérations de la pile.

Lorsque l'on écrit un programme utilisant une pile, on doit inclure le header :

```c
#include "pile.h"
#include <stdio.h>


int main(int argc, char const *argv[])
{
  pile_t* p = pile_vide();

  empiler(p, 'a');
  empiler(p, 'b');
  printf("%c\n", depiler(p));
  empiler(p, 'c');
  printf("%c\n", depiler(p));
  if (est_vide(p)){
    printf("La pile est vide");
  } else {
    printf("La pile n'est pas vide");
  }

  free_pile(p);
  return 0;
}
```

A la compilation, on peut **choisir** quelle structure concrète utilisée, simplement en changeant la commande de compilation :

```
gcc main.c pile_tab.c -o prog_avec_tab
gcc main.c pile_chaine.c -o prog_avec_chaine
```

Le fait d'avoir séparé la SDA et la SDC fait que l'on peut facilement changer la SDC, car seule la spécification importe. De même, si l'on change une des deux implémentations, par exemple si l'on trouve une manière plus optimisée, ou utilisant un algorithme alternatif, du moment que l'on respecte toujours la spécification, le code de `main.c` n'a pas besoin de changer.

## E Application

Voyons un exemple d'utilisation de la pile : les mots biens parenthésés.

Un mot sur l'alphabet { `[`, `(`,`]`,`)` } est dit bien parenthésé si chaque parenthèse ouvrante est associée à une parenthèse fermante correspondante qui la suit dans le mot.

Par exemple, `([]([]))` est bien parenthésé, mais `([]` et `([)]` ne le sont pas.

On considère donc le problème de décision **Bien-Parenthésé** :

Étant donné $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un mot sur { `[`, `(`,`]`,`)` }, $s$ est-il bien parenthésé ?

Un algorithme qui apparaît naturellement pour tester si un mot est bien parenthésé est celui qui utilise une pile : lorsqu'on lit un symbole ouvrant on l'empile, et lorsqu'on lit un symbole fermant, on vérifie qu'il correspond bien au sommet de la pile.

**Exemple 4.** Déterminer si le mot `([]([()[]]]())` est bien parenthésé.

Plus précisément :

---

**Entrée(s) :** $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un mot sur { `[`, `(`,`]`,`)` }
**Sortie(s) :** "Oui" si le mot est bien parenthésé, "Non" sinon

```
1  P ← pile_vide();
2  i ← 0;
3  tant que i < n faire
4      si s_i = ( ou s_i = [ alors
5          empiler(P, s_i);
6      sinon
7          si est_vide(P) alors
8              retourner Non ;
9          sinon
10             b ← dépiler(P);
11             si b et s_i ne correspondent pas alors
12                 retourner Non ;
13     i ← i + 1 ;
14 retourner est_vide(P);
```

---

**Terminaison** Le programme termine, car sa seule boucle while est en réalité une boucle for.

**Complexité** La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$ car toutes les opérations des piles sont en $\mathcal{O}(1)$ avec les implémentations vues précédemment.

**Correction** On veut montrer que l'algorithme renvoie Oui si et seulement si $s$ est bien parenthésé. Le principe de l'algorithme est que la pile $P$ stocke des parenthèses ouvrantes pour lesquelles on n'a pas encore trouvé de parenthèse fermante. Autrement dit, en lisant $s_0 \dots s_{i-1}$ on a éliminé les parties bien-parenthésées et stocké le trop-plein de parenthèses ouvrantes dans $P$.

Cela nous pousse vers l'invariant de boucle suivant :

I : "$s$ est bien-parenthésé $\Leftrightarrow$ $\mathbf{mot}(P)s_is_{i+1}\dots s_{n-1}$ est bien-parenthésé"

avec $\mathbf{mot}(P) = x_{k-1}\dots x_1x_0$, où $x_0$ est le sommet de $P$, $x_1$ l'élément sous le sommet, etc...

Montrons que la propriété ci-dessus est bien un invariant de boucle.

- En entrée de boucle, $i = 0$ et $P$ est vide, donc $\mathbf{mot}(P) = \varepsilon$ (le mot vide). Donc, $\mathbf{mot}(P)s_is_{i+1}\dots s_{n-1} = s$ et la propriété $I$ est trivialement vraie.
- On se place au début d'un passage, on suppose que la propriété est vraie. Montrons qu'elle l'est toujours à la fin du passage. On note $P'$ l'état de $P$ à la fin du passage, et $i'$ la valeur de $i$ à la fin du passage. On distingue deux cas : si $s_i$ est ouvrante, et si $s_i$ est fermante.
  - Si $s_i$ est ouvrante, alors $i' = i+1$ et $P' = \boxed{\begin{array}{|c|}\hline s_i \\ \hline P \\ \hline\end{array}}$, et donc $\mathbf{mot}(P') = \mathbf{mot}(P)s_i$. donc :

    $$\begin{array}{rcll} s \text{ est bien-parenthésé} & \Leftrightarrow & \mathbf{mot}(P)s_is_{i+1}\dots s_{n-1} \text{ est bien-parenthésé} & \text{(par HI)} \\ & \Leftrightarrow & \mathbf{mot}(P)s_is_{i'}\dots s_{n-1} \text{ est bien-parenthésé} & \text{(car } i' = i+1\text{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathbf{mot}(P')s_{i'}\dots s_{n-1} \text{ est bien-parenthésé} & \text{(car } \mathbf{mot}(P') = \mathbf{mot}( \end{array}$$

    et donc la propriété est vraie à la fin du passage.
  - Si $s_i$ est fermante, sans perte de généralité, on suppose que $s_i$ vaut ')'.
    - Si $P$ est vide, alors $\mathbf{mot}(P) = \varepsilon$ et donc $\mathbf{mot}(P)s_is_{i+1}\dots s_{n-1}$ n'est pas bien-parenthésé, et donc par hypothèse, $s$ n'est pas bien parenthésé, et l'algorithme renvoie bien Non.
    - Sinon : on note $b$ le sommet de $P$. Alors $i' = i+1$ et $P = \boxed{\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline P' \\ \hline\end{array}}$, et donc $\mathbf{mot}(P) = \mathbf{mot}(P')b$.

      Donc :

      $$\begin{array}{rcl} s \text{ est bien-parenthésé} & \Leftrightarrow & \mathbf{mot}(P)s_is_{i+1}\dots s_{n-1} \text{ est bien-parenthésé} \\ & \Leftrightarrow & \mathbf{mot}(P')bs_is_{i'}\dots s_{n-1} \text{ est bien-parenthésé} \end{array}$$

      Or, $b$ est ouvrante, et $s_i$ est fermante, donc $\mathbf{mot}(P')bs_is_{i'}\dots s_{n-1}$ est bien-parenthésé $\Leftrightarrow$ ($\mathbf{mot}(P')s_{i'}\dots s_{n-1}$ est bien-parenthésé et $s_i$ correspond à $b$).

      Si $s_i$ ne correspond pas à $b$ alors $s$ n'est pas bien parenthésé, et l'algorithme renvoie Non. Sinon, l'invariant de boucle est bien préservé.

En particulier, à la sortie de la boucle, $i = n$ et donc $s$ est bien parenthésé si et seulement si $\mathbf{mot}(P)$ l'est. Mais $P$ ne contient que des parenthèses ouvrantes : donc $s$ est bien parenthésé si et seulement si $P$ est vide, ce qui correspond bien à la valeur renvoyée par l'algorithme.

D'où la correction de l'algorithme

# 3 File

La structure de file stocke des données selon le principe "Dernier arrivé, dernier sorti", ou ***LILO*** (Last In Last Out), ou encore ***FIFO*** (First In First Out) Ainsi, les données sont lues dans l'ordre où elles sont ajoutées,

**Remarque 2.** Visuellement, c'est une file d'attente au supermarché !

**Exemple 5.** Voici un exemple d'utilisation d'une file :

## A Structure de données abstraite

Une file représente une suite finie d'éléments de type `T`, dont la taille peut varier. Une file a une tête et une queue, et ses éléments sont rangés, de telle sorte que l'on enfile les nouveaux éléments à la queue de la file, et que l'on défile les éléments par la tête de la file. Ses opérations sont :

— Créer une file vide : **file_vide**() ;

— Enfiler un nouvel élément $x$ à la queue d'une file $F$ : **enfiler**$(F, x)$ ;

— Défiler l'élément à la tête d'une file $F$ et le renvoyer : **defiler**$(F)$ ;

— Déterminer si une file est vide : **est_vide**$(F)$.

**Exercice 2.** Pour chaque opération, dire si c'est un accesseur, un transformateur ou un constructeur.

Les files sont très similaires aux piles, et les deux premières implémentations que nous allons voir, par liste chaînée et par tableau, sont proches de celles pour les piles.

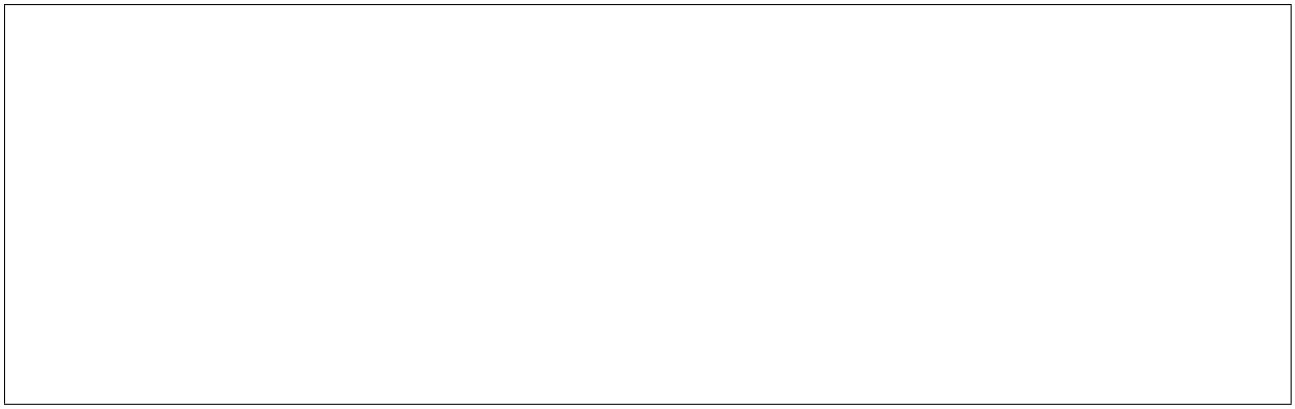
## B Implémentation par liste chaînée

On utilise presque les mêmes structures que pour les piles, mais on doit stocker deux pointeurs : celui de la tête et celui de la queue :

```
1 typedef struct maillon {
2   T elem;
3   struct maillon* suiv; // de la tete vers la queue
4 } maillon_t;
5
6 typedef struct file_{
7   maillon_t* tete;
8   maillon_t* queue;
9 } file_t;
```

Attention, le sens des pointeurs `suiv` va **contre** le sens de la file.

**Exemple 6.** Voici une file abstraite et le schéma qu'on aurait en mémoire avec une pile concrète par liste chaînée :

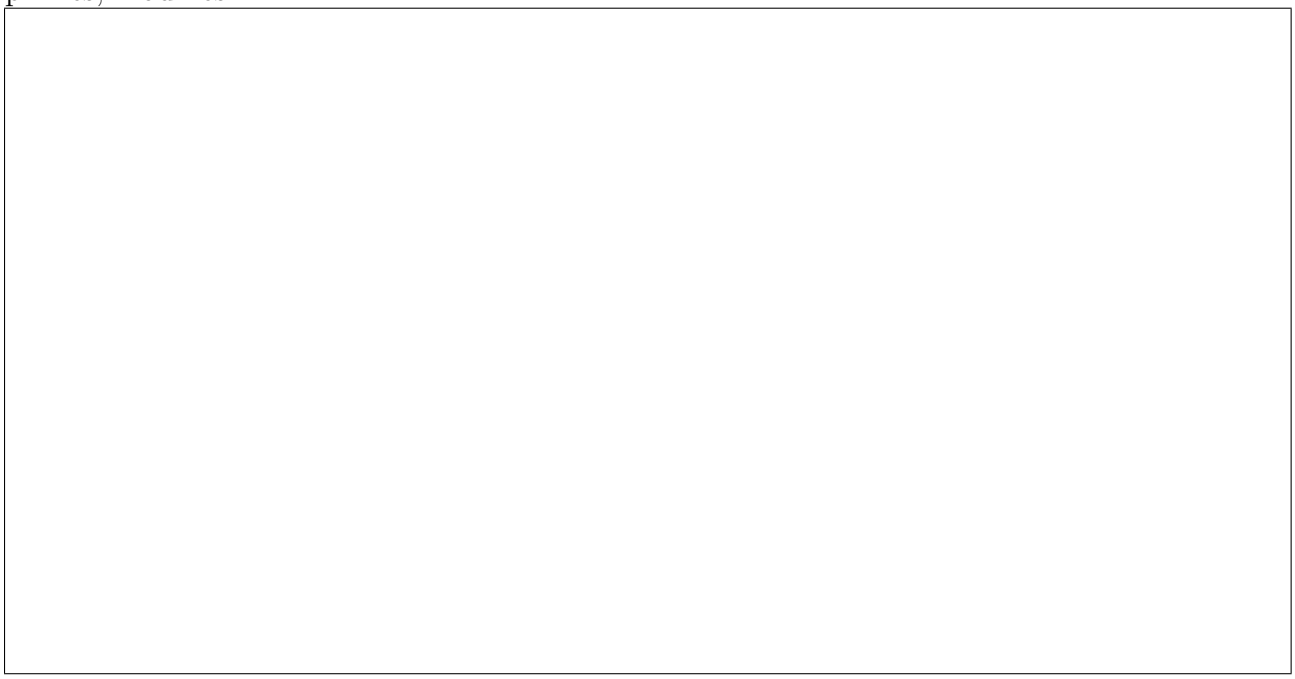


Pour créer une file vide et déterminer si une file est vide, on procède exactement comme pour les piles :

```
1 file_t* file_vide(){
2   file_t* f = malloc(sizeof(file_t));
3   f->tete = NULL;
4   f->queue = NULL;
5 }
6
7 bool est_file_vide(file_t* f){
8   return (f->tete == NULL); // ou bien: return (f->queue == NULL);
9 }
```

**Enfilage** Enfiler un élément est plus technique. On rajoute un maillon, qui devient dans tous les cas la queue de la file, mais si la file était vide alors la tête de file a aussi changé !

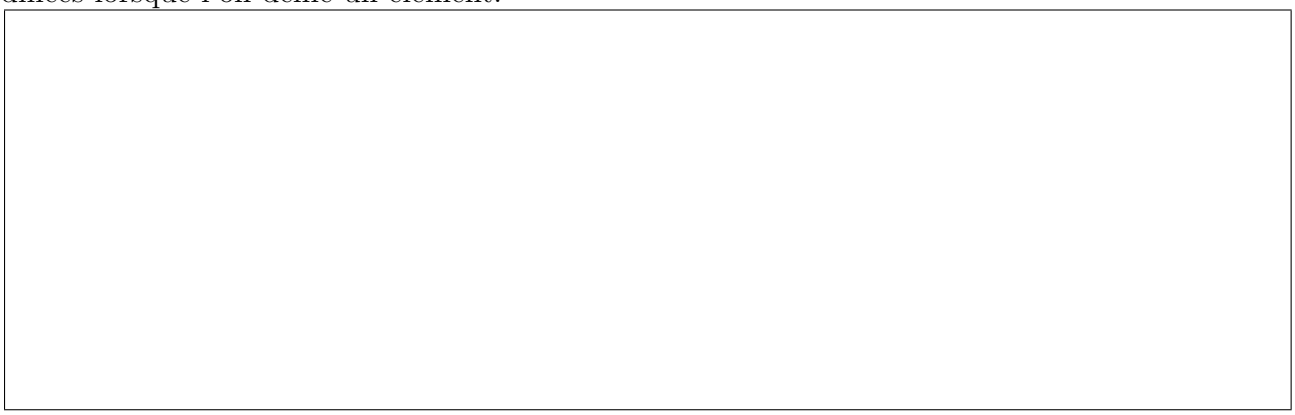
**Exemple 7.** On enfile un élément dans une file non vide, et un élément dans une file vide. Dans chaque situation, on dessine un schéma de la mémoire et on note les liens qui sont ajoutés, supprimés, modifiés :



On en déduit le code C suivant :

```
1  void enfiler(file_t* f, T x){
2    maillon_t* anc_q = f->queue; // ancienne queue
3
4    // création de la nouvelle queue de file
5    maillon_t* nouv_q = malloc(sizeof(maillon_t));
6    nouv_q->elem = x;
7    nouv_q->suivant = NULL;
8
9    // mise à jour de la queue
10   f->queue = nouv_q;
11   if (anc_q == NULL){ //la file était vide: mettre à jour la tete
12     f->tete = nouv_q;
13   } else { // anc_q a maintenant un maillon suivant: nouv_q
14     anc_q->suiv = nouv_q
15   }
16 }
```

**Défilage** A nouveau, faisons des schémas pour étudier comment les différentes liaisons sont modifiées lorsque l'on défile un élément.



On obtient le code C suivant :

```
1  T defiler(file_t* f){
2    assert(!est_file_vide(f));
3
4    maillon_t* anc_tete = f->fete; // ancienne tete
5    T res = anc_tete->elem;
6
7    maillon_t* nouv_tete = ancienne_tete->suivant;
8    f->tete = nouv_tete;
9
10   if (f->tete == NULL){ // la file est vide
11     f->queue = NULL;
12   }
13   return res;
14 }
```

L'affichage et la libération de mémoire se font de manière analogue à ce que l'on a fait pour les piles.

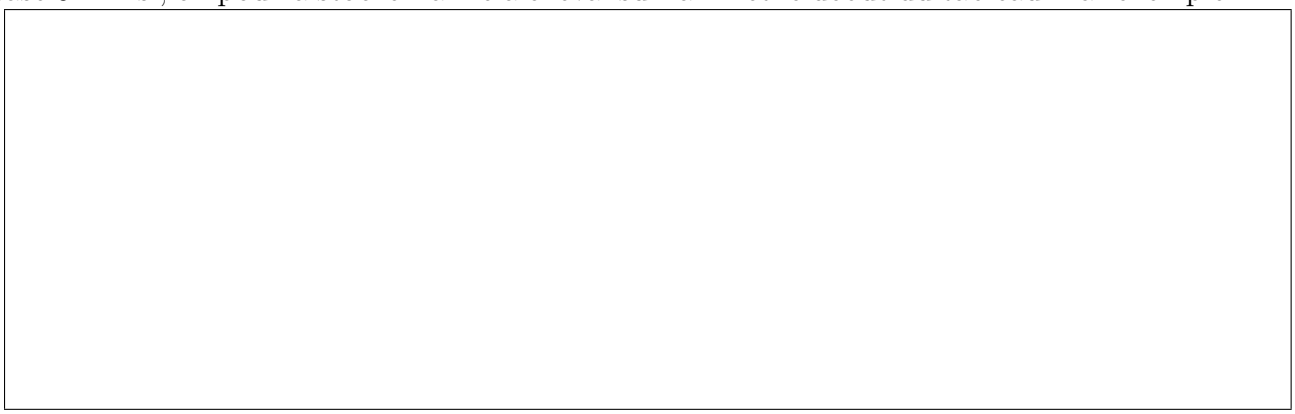
## C Implémentation par tableau

Cette implémentation ressemble de près à celle des piles : on remplit un tableau avec les valeurs de la file, de la tete vers la queue. Plus précisément, on utilise la structure suivante :

```
#define Nmax 10000
typedef struct file {
  int queue; //indice de la prochaine case à remplir, i.e. la prochaine queue
  int nb_elem; // nombre d'éléments dans la file
  T tab[Nmax];
} file_t;
```

Dans une file `f` de ce type, les cases utiles sont les cases d'indice `f->queue - 1 - i` avec $i$ allant de 0 à `f->nb_elem`. La tête de queue est à la case `f->queue - 1 - f->nb_elem` lorsque `f->nb_elem` n'est pas nul. Simulons l'évolution d'une file implémentée ainsi avec $N_{max} = 3$ :

On voit donc qu'en utilisant directement cette implémentation, on se heurte à un problème : la file peut devenir inutilisable alors qu'elle n'est pas pleine. On va donc travailler dans des **tableaux cycliques**. Autrement dit, on considère que la case $N_{max} - 1$ du tableau est collée à la case 0. Ainsi, on pourra stocker la file à cheval sur la fin et le début du tableau. Par exemple :



Notons que cela revient à prendre les indices modulo $N$.

Pour créer une file vide, et déterminer si une file est vide :

```
file_t* file_vide(){
  file_t* f = malloc(sizeof(file_t));
  f->nb_elem = 0;
  f->queue = 0;
  return f;
}

bool est_vide(file_t* f){
  return (f->nb_elem == 0);
}
```

L'opération pour enfiler est similaire à celle d'empilage de la pile, mais on travaille modulo la taille du tableau :

```
1 void enfiler(file_t* f, T x){
2   assert(f->nb_elem < Nmax);
3   f->tab[f->queue] = x;
4   f->queue = (f->queue + 1) % Nmax;
5   f->nb_elem++;
6 }
```

Pour défiler, il faut commencer par trouver l'indice de la case correspondant à la tête de file :

```
1 T defiler(file_t* f){
2   assert(!est_vide(f));
3   T res = f->tab[(Nmax + f->queue - f->nb_elem)%Nmax];
4   f->nb_elem--;
5   return res;
6 }
```

# 4 Tableau redimensionnable

Une limite des implémentations par tableau des piles et des files est que l'on a une taille limite à nos structures. On s'intéresse à l'implémentation d'une structure que l'on appellera **vecteur**, où les opérations sont celles des tableaux (lecture d'une case, écriture d'une case) et celles d'une pile (ajouter ou supprimer un élément à la fin), sans limite de taille L'implémentation sera facilement adaptable aux implémentations des piles et files par tableau.

L'idée est de prendre un tableau d'une taille arbitraire (4 dans le code ci-dessous), et de **redimensionner** ce tableau à chaque fois qu'il est rempli.

```
1  typedef struct vect{
2    T* tab; // éléments
3    int taille_max; // nombre de cases allouées pour tab
4    int nb_elem; // nombre de cases utilisées
5  } vect_t;
6
7  vect_t* creer_vecteur(){
8    vect_t* v = malloc(sizeof(vect_t));
9    v->nb_elem = 0;
10   v->tab = malloc(4 * sizeof(T));
11   v->taille_max = 4;
12   return v;
13 }
```

Lorsque l'on ajoute un élément à la fin du vecteur, s'il ne reste plus de place, i.e. si `nb_elem == taille_max`, on alloue un nouveau tableau, plus grand, et on y recopie tous les éléments.

**Exercice 3.** En décidant arbitrairement d'augmenter la taille de 10 à chaque fois qu'on réalloue, représenter l'évolution du tableau si l'on ajoute les éléments 1, 2, 3, 4, 5, ... à partir d'un vecteur vide.

En C, la fonction `realloc` sert à réallouer de la mémoire. Par exemple :

```
1  int* p = malloc(10 * sizeof(int));
2  ...
3  p = realloc(p, 15*sizeof(int));
```

Dans le code précédent, la dernière ligne désalloue les 10 cases int réservées à la ligne d'au dessus, et alloue 15 nouvelles cases. Elle recopie dans les nouvelles cases le contenu des anciennes. Cette opération prend un temps linéaire en l'ancienne taille mémoire car elle doit recopier chaque élément un à un.

On peut donc implémenter l'opération d'ajout comme suit :

```
1  void ajouter(vect_t* v, T x){
2    // redimensionner si nécessaire
3    if (v->nb_elem == v->taille_max){
4      int nouvelle_taille = ???;
5      v->tab = realloc(v->tab, nouvelle_taille);
6      v->taille_max = nouvelle_taille;
7    }
8    v->tab[v->nb_elem] = x;
9    v->nb_elem++;
10 }
```

Il reste à choisir de combien augmenter la taille lorsque l'on redimensionne. Notons que dans tous les cas, la complexité de l'ajout dans un vecteur de taille $n$ sera en $\Omega(n)$ car dans le pire

cas (c'est à dire en cas de redimensionnement), il faut recopier tous les éléments. Cependant, on peut étudier le **coût total d'une suite d'ajouts**. En effet, lorsque l'on utilise une structure dans un programme, le coût unitaire d'une opération est moins important que le coût global des opérations effectuées.

On dit que l'on étudie la **complexité amortie** de l'ajout : si l'on effectue $n$ ajouts depuis un vecteur vide, en notant le coût total $C_n$, on appellera **coût amorti** de l'ajout la valeur moyenne $\frac{C_n}{n}$. Le principe de l'analyse amortie est que les opérations coûteuses peuvent être si rare que leur coût est compensé par le grand nombre d'opérations pas chères.

**Première idée** A chaque ajout, on augmente de 1 la taille du tableau.

Alors, à partir du premier redimensionnement, chaque ajout cause un redimensionnement et coûte $\Theta(i)$ où $i$ est la taille du vecteur au moment de l'ajout. Ainsi, si l'on ajoute $n$ éléments d'affilée, la complexité totale est en $\Theta(n^2)$.

**Deuxième idée** Plutôt que de réallouer un tableau avec une seule place de plus, on fixe $K \in \mathbb{N}^*$ et on alloue le tableau par blocs de $K$ cases : Initialement, le tableau possède $K$ cases, puis lorsque l'on doit ajouter un $K+1$-ème élément, on réalloue un tableau de taille $2K$, puis de taille $3K$, etc...

Ainsi, si l'on fait plusieurs ajouts, alors les $K$ premiers se feront en temps constant, puis le $K+1$-ème en temps $K$, puis les $K-1$ suivants en temps constant, puis le $2K$-ème en temps $2K$, etc...

Le coût total combiné de $n$ ajouts dans un vecteur vide est inférieur à :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-1} (i+1 \text{ si } i \text{ est multiple de } K,\ 1 \text{ sinon}) \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (i \text{ si } i \text{ multiple de } K,\ 0 \text{ sinon}) \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{K} \rfloor} Kj \\
= & \ n + K \frac{\lfloor \frac{n-1}{K} \rfloor (\lfloor \frac{n-1}{K} \rfloor + 1)}{2} \\
= & \ \mathcal{O}(n^2)
\end{aligned}$$

Donc, en moyenne, un ajout prend de l'ordre de $\mathcal{O}(n)$, comme pour la première idée.

**Troisème idée** On double la taille du tableau à chaque fois. Si l'on calcule à nouveau le coût total de $n$ ajouts successifs, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-1} (i+1 \text{ si } i \text{ puissance de 2},\ 1 \text{ sinon}) \\
\leq & \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} 2^j \\
\leq & \ n + 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1} \\
\leq & \ 3n
\end{aligned}$$

Donc, le coût moyen d'un ajout est constant ! On dit que l'ajout a un coût **amorti** $\mathcal{O}(1)$.

# 5 Dictionnaires

Les dictionnaires font partie des structures de données les plus importantes en informatique. Un dictionnaire est comme un tableau, indexé par des éléments d'un type quelconque plutôt que par des entiers consécutifs.

**Exemple 8.** Démo python

On fixe $K$ et $V$ deux ensembles. Un dictionnaire stocke des couples $(k, v) \in K \times V$, où l'on appelle $k$ la clé et $v$ la valeur. Pour une clé $k \in K$ donné, il y a au plus un couple dans le dictionnaire dont $k$ est la clé. On peut donc chercher dans un dictionnaire selon une clé particulière, et modifier ou supprimer la valeur associée à une clé.

— **dict**() crée un dictionnaire vide ;

— **ajout**$(D, k, v)$ associe la valeur $v$ à la clé $k$ dans le dictionnaire $D$.

— **contient**$(D, k)$ détermine si la clé $k$ est dans le dictionnaire $D$.

— **recherche**$(D, k)$ renvoie la valeur associée à la clé $k$ dans le dictionnaire $D$. $k$ doit être une clé valable.

— **supprime**$(D, k)$ supprime la clé $k$ du dictionnaire $D$, ainsi que la valeur qui y était associée.

Lorsque l'on associe une valeur $v \in V$ à une clé $k \in K$, si $k$ est déjà dans le dictionnaire, alors on écrase sa valeur associée pour y écrire $v$. On utilisera parfois une notation proche des tableaux : si $D$ est un dictionnaire et $k$ une clé, alors $D[k]$ est la valeur associée à $k$ dans $D$, i.e. **recherche(D, k)**. De même, écrire $D[k] = v$ revient à écrire **ajout**$(D, k, v)$.

## A Exemples d'applications des dictionnaires

**Nombre d'occurences** Étant donné un tableau $T$ d'éléments, on se demande quel est l'élément majoritaire, i.e. l'élément ayant le plus d'occurrences dans $T$ :

**Algorithme 2 :** Élément majoritaire

**Entrée(s) :** $T$ tableau de taille $n$
**Sortie(s) :** $x \in T$ tel que $\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid T[i] = x\}$ est de cardinal maximal

Un premier algorithme naïf consiste à regarder, pour chaque case, le nombre de cases qui contiennent la même valeur, et de garder en mémoire la meilleure case vue jusqu'à maintenant :

**Algorithme 3 :** Élément majoritaire

**Entrée(s) :** $T$ tableau de taille $n$
**Sortie(s) :** $x \in T$ tel que $\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid T[i] = x\}$ est de cardinal maximal

```
1  x_m ← Rien // élément le plus fréquent vu jusqu'à maintenant
2  o_m ← 0 // nombre d'occurrences de x_m dans T
3  pour i = 0 à n − 1 faire
4      o ← 0// nombre d'occurrences de T[0] dans T
5      pour j = 0 à n − 1 faire
6          si T[i] = T[j] alors
7              o ← o + 1;
8      si o > o_m alors
9          o_m ← o;
10         x_m ← T[i];
11 retourner x_m
```

La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(n^2)$. Voyons comment résoudre ce problème plus efficacement avec un dictionnaire. L'idée est de créer un dictionnaire dont les clés sont les éléments du tableau, tel que la valeur associée à un élément est son nombre d'occurrences dans $T$. On commence par remplir ce dictionnaire en lisant une fois le tableau, puis on regarde la clé du dictionnaire ayant la plus grande valeur :

**Algorithme 4 :** Élément majoritaire

**Entrée(s) :** $T$ tableau de taille $n$
**Sortie(s) :** $x \in T$ tel que $\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid T[i] = x\}$ est de cardinal maximal

```
   // Calcul du dictionnaire des occurrences
1  O ← Dictionnaire vide // x ↦ nombre d'occurrences de x
2  pour i = 0 à n − 1 faire
3      si T[i] n'est pas une clé de O alors
4          O[T[i]] ← 0;
5      O[T[i]] ← O[T[i]] + 1;
   // Recherche de la clé de valeur maximale
6  x_m ← Rien ;
7  o_m ← 0;
8  pour x clé de D faire
9      si O[x] > o_m alors
10         o_m ← o;
11         x_m ← x;
12 retourner x_m
```

Alors, le en notant $A(i)$ le coût de l'ajout dans un dictionnaire à $i$ éléments et $R(i)$ le coût de la recherche dans un dictionnaire à $i$ éléments, le coût total de l'algorithme est :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(R(i) + A(i)) + nR(n)$$

Nous allons voir une implémentation des dictionnaires où toutes les opérations sont en temps **constant** $\mathcal{O}(1)$. L'algorithme précédent est alors en $\mathcal{O}(n)$ : on a gagné un facteur $n$ par rapport à l'algorithme naïf !

**Facteur Noël** Une classe de $n$ élèves organise un Noël canadien. Chaque élève offre un cadeau à un autre élève. Une fois les cadeaux distribués, les élèves ont noté dans un fichier texte les différentes affectations de cadeaux, sous la forme :

```
Jules -> Dina
Camille -> Jules
Alma -> Ulysse
Dina -> Camille
...
```

Étant donné un élève $x_0$, on considère $x_1$ l'élève a qui il a offert un cadeau, $x_2$ l'élève à qui $x_1$ a offert un cadeau, et ainsi de suite, jusqu'à tomber sur un élève $x_{k-1}$ ayant offert un cadeau à $x_0$ (exercice : montrer que c'est toujours le cas). On appelle cette suite $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_{k-1} \to x_0$ une ***chaîne de Noël***.

On appelle $k$ le **facteur Noël** de $x$, i.e. le nombre d'élèves impliqués dans la chaîne de Noël contenant $x$. Comment calculer efficacement le facteur Noël d'un élève ?

On suppose que l'on a stocké dans un tableau $C$ les couples $(x, y)$ tels que $x$ a offert un cadeau à $y$. Un algorithme naïf est donc :

**Algorithme 5 :** Facteur Noël

**Entrée(s) :** $C$ un tableau d'affectations pour le Noël canadien, $x$ un élève
**Sortie(s) :** Le facteur Noël de $x$

```
1 res ← 1;
2 Rechercher linéairement dans C le couple commençant par x;
3 y ← la deuxième composante de ce couple;
4 tant que y ≠ x faire
5 |   Rechercher linéairement dans C le couple commençant par y;
6 |   y ← la deuxième composante de ce couple;
7 |   res ← res + 1;
8 retourner res
```

La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(n^2)$. En admettant que l'on peut trier un tableau en $\mathcal{O}(n \log n)$, on peut améliorer l'algorithme en :

— Triant $C$ par première composante croissante

— Faisant des recherches par dichotomie plutôt que des recherches linéaires

On obtient donc une complexité totale en $\mathcal{O}(n \log n)$.

On peut modifier cet algorithme pour transformer $C$ en un dictionnaire stockant les associations d'élèves, i.e. en un dictionnaire $D$ tel que pour tout élève $x$, $D[x]$ est l'élève à qui $x$ a offert un cadeau.

**Algorithme 6 :** Facteur Noël

**Entrée(s) :** $C$ un tableau d'affectations pour le Noël canadien, $x$ un élève
**Sortie(s) :** Le facteur Noël de $x$

```
1 D ← dictionnaire_vide();
2 pour (x, y) dans C faire
3 |  D[x] ← y;
4 res ← 1;
5 y ← D[x];
6 tant que y ≠ x faire
7 |  y ← D[y];
8 |  res ← res + 1;
9 retourner res
```

Alors, le en notant $A(i)$ le coût de l'ajout dans un dictionnaire à $i$ éléments et $R(i)$ le coût de la recherche dans un dictionnaire à $i$ éléments, le coût total de l'algorithme est :

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(i) + KR(n)$$

avec $K$ le facteur Noël de l'élève $x$.

Avec des opérations en temps constant, la complexité de cet algorithme sera en $\mathcal{O}(n+K) = \mathcal{O}(n)$ : linéaire.

**Implémentation par liste chaînée** On commence par une implémentation plus naïve, où la recherche sera en complexité linéaire.

L'idée de cette implémentation est d'avoir une liste doublement chaînée dont les maillons contiennent des couples $(k, v)$ clé-valeur :

```
1  typedef struct maillon{
2    K key;
3    V value;
4    struct maillon* suiv;
5    struct maillon* prec;
6  } maillon_t;
7
8  typedef struct dict{
9    maillon_t* tete;
10 } dict_t;
```

Pour faire une recherche, une modification ou une suppression, le principe est le même : faire une recherche linéaire en parcourant les maillons un à un. Par exemple :

```
1  /* Stocke dans *result la valeur associée à K dans d,
2     et renvoie un booléen indiquant si K a été trouvée */
3  bool recherche(dict_t* d, K key, V* result){
4    for (maillon_t* m = d->tete; m != NULL; m = m->suiv){
5      if (m->key == K){
6        *result = m->value;
7        return true;
8      }
9    }
10   return false;
11 }
```

# 6 Dictionnaires : tables de hachage

**Rappel** Un dictionnaire $D$ permet de stocker des couples $(k, v) \in K \times V$ appelés clés-valeurs, tels que chaque clé $k \in K$ correspond à au plus une valeur, autrement dit, pour $(k_1, v_1), (k_2, v_2) \in D$, $k_1 = k_2 \Rightarrow v_1 = v_2$. Les opérations associées sont :

— Création d'un dictionnaire vide (Constructeur)

— Écriture d'un couple $(k, v)$ (Transformateur)

— Recherche de la valeur associée à une clé $k$ (Accesseur)

— Suppression d'une clé $k$ (Transformateur)

Un dictionnaire se comporte donc comme une fonction : à chaque clé on associe une valeur unique. On appelle parfois les dictionnaires des ***tableaux associatifs***, et en anglais on voit parfois le terme ***map***.

Les dictionnaires sont une généralisation des tableaux. Si l'ensemble $K$ des clés est de la forme $[\![0, m-1]\!]$ pour un $m \in \mathbb{N}$, alors un dictionnaire ayant $K$ comme clés est presque exactement un ***tableau***. La différence est que pour un dictionnaire, il faut pouvoir indiquer si une case est utilisée ou pas, i.e. si l'indice de la case est présent dans le dictionnaire ou pas.
Donc, si l'ensemble des clés $K$ est fini de cardinal $m$, et que l'on dispose d'une fonction bijective de numérotation $f : K \to [\![0, m-1]\!]$, on peut implémenter un dictionnaire par un tableau, qui stockera des éléments de $V \cup \{\mathbf{NIL}\}$, où **NIL** est une valeur particulière qui indique "pas de valeur" :

— Création d'un dictionnaire vide : renvoyer un tableau $T$ de taille $m$, avec $T[i] = \mathbf{NIL}$ pour $i \in [\![0, m-1]\!]$.

— Écriture d'un couple $(k, v)$ : Effectuer $T[f(k)] \leftarrow v$.

— Recherche de la valeur associée à $k$ : Renvoyer $T[f(k)]$.

— Suppression de la clé $k$ : Effectuer $T[f(k)] \leftarrow \mathbf{NIL}$.

Par exemple, on suppose que l'on prend comme clés les chaînes de caractères de taille au plus 10. En utilisant le code ASCII, on peut voir une telle chaîne comme un entier de 10 chiffres en base 256. On peut donc implémenter un dictionnaire ayant ces chaînes comme clés, mais cela nécessite un tableau de taille $256^{10} \approx 10^{24}$...

Le principe des tables de hachage est de ramener n'importe quel ensemble de clé à un ensemble de la forme $[\![0, m-1]\!]$ pour un $m \in \mathbb{N}$, avec $m$ raisonnablement petit.

**Définition 4.** Soit $K$ un ensemble de clés, et $m \in \mathbb{N}^*$. Une fonction de hachage est une fonction $h : K \to [\![0, m-1]\!]$.

Si $h$ est une fonction de hachage à valeurs dans $[\![0, m-1]\!]$, alors on peut implémenter un dictionnaire à clés dans $K$ par un tableau de taille $m$. Pour insérer, modifier ou supprimer une clé $k \in K$ donnée, on calcule $i = h(k)$, et on regarde à la $i$-ème case du tableau. On appelle un tel tableau une ***table de hachage***.

**Exemple 9.** Soit $K$ l'ensemble des prénoms. On considère l'ensemble de clés suivant :

`caro`, `guigui`, `max`, `oli`

On veut associer à chaque prénom un entier (ex : le score lors d'une partie de jeu). On crée un tableau de taille 26, une case pour chaque lettre de l'alphabet, et on stocke le score de

chaque joueur dans la case correspondant à la première lettre de son prénom. Autrement dit, en considérant que $a = 0, b = 1, \ldots, z = 25$ :

$$h(k) = \text{la première lettre de } k$$

On obtient donc la table de hachage suivante :

| |
|---|
| |

**Exercice 4.** On considère le même problème que l'example précédent, mais maintenant avec une table de taille $m = 4$, et une autre fonction de hachage :

$$h_2(k) = \sum_{x \text{ lettre de } k} x \mod 4$$

(On considère toujours que $a = 0, b = 1, \ldots, z = 25$). Calculer les hash (i.e. les valeurs de $h_2(k)$) pour les 4 clés `caro`, `guigui`, `max`, `oli`, et représenter la table de hachage :

| |
|---|
| |

On peut donc se retrouver dans une situation ou deux clés sont hachées vers la même valeur. De plus, dès que la taille $m$ de la table est strictement inférieure à $|K|$, on trouvera forcément deux telles clés car on n'aura pas injectivité de la fonction de hachage.

**Définition 5.** Soit $h : K \to [\![0, m-1]\!]$ une fonction de hachage et $k \neq k' \in K$. On dit que $k$ et $k'$ forment une ***collision*** si $h(k) = h(k')$

De plus, si l'on reprend la première fonction de hachage, celle qui prend seulement la première lettre du prénom, on remarque que peu de prénoms commencent par k, w, x, y, z par rapport aux autres lettres. Donc, certaines cases causeront de nombreuses collisions, et d'autres seront presque inutilisées. Il faut donc aussi choisir une ***bonne fonction de hachage***. On voudrait que la valeur de hachage fabriquée par la fonction soit "aléatoire". Si on reprend la deuxième fonction vue en exemple, qui fait la somme des lettres et prend le résultat modulo $m$, on peut imaginer qu'a priori,il n'y aura pas de case privilégiée.

Dans la suite, on considère $T$ un tableau de taille $m$ utilisé comme table de hachage pour un dictionnaire. On note $\{k_0, \ldots, k_{n-1}\}$ les clés utilisées, $n$ est donc la taille du dictionnaire.

Il existe deux classes de méthodes pour résoudre les collisions dans une table de hachage :

— Les méthodes de résolution par chaînage : les éléments dont les clés ont la même valeur par la fonction de hachage sont liés entre eux. On parle de hachage indirect.

— Les méthodes de résolution par calcul : Lorsqu'il y a une collision, on calcule un nouvel emplacement où stocker la nouvelle clé. On parle de hachage direct.

Dans ce cours, on se contentera d'étudier la gestion par chaînage.

## A Gestion des collisions par chaînage

Le principe est de stocker dans chaque case de la table de hachage une **liste chaînée** de tous les éléments qui y ont été mis par hachage. Ainsi, $T[i]$ contiendra la liste chaînée de toutes les clés $k \in \{k_0, \ldots, k_{n-1}\}$ telles que $h(k) = i$. Les cases de $T$ sont appelées des ***alvéoles*** (et parfois *buckets* en anglais).

On se ramène donc à la manipulation de dictionnaires par liste chaînée étudiée au début de cette section. Pour insérer, supprimer, modifier ou rechercher dans une table de hachage, on calcule le hash de la clé $k$ à traiter notons le $i$, et on effectue l'opération sur la liste chaînée stockée dans l'alvéole $i$ du tableau.

On implémente donc les opérations comme suit :

— Création d'un dictionnaire vide : Renvoyer un tableau $T$ de taille $m$, avec chaque case contenant une liste vide. Les maillons de ces listes stockeront des couples clé-valeur.

— Écriture d'un couple $(k, v)$ :

**Algorithme 7 :** Écriture dans une table de hachage avec chaînage

**Entrée(s) :** $T$ table de hachage, $h$ fonction de hachage à utiliser, $(k, v) \in K \times V$ couple à insérer

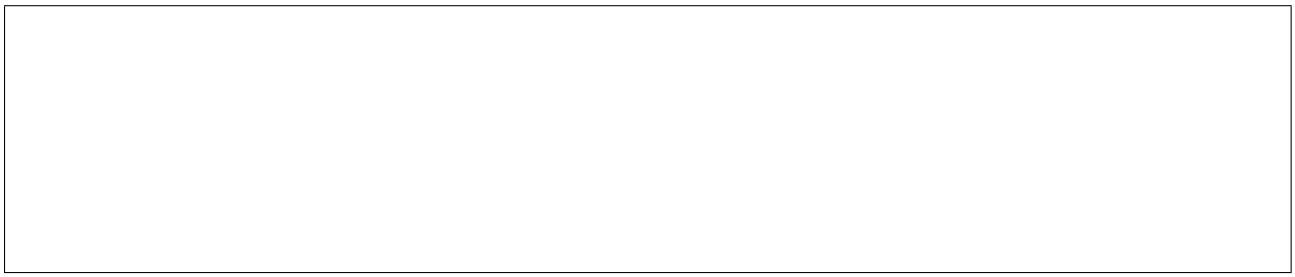
```
1 i ← h(k);
2 m ← recherche(T[i], k) // Maillon contenant la clé k
3 si m = NULL alors
4 |  ajouter(T[i], (k, v));
5 sinon
6 |  m.v = v;
```

— Recherche, Suppression : même principe

**Exemple 10.** On prend $m = 9$, et on considère les clés $k_0, \ldots, k_{12}$ et leurs valeurs de hachage :

| clé | : | $k_0$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ | $k_8$ | $k_9$ | $k_{10}$ | $k_{11}$ | $k_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| hash | : | 3 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 5 | 9 | 2 | 6 | 5 | 3 | 5 |

Alors la table de hachage ressemblera à :



Le pire cas pour ces opérations est atteint lorsque toutes les associations sont stockées dans la même alvéole. La complexité est alors en $\mathcal{O}(n)$. En pratique, lorsque l'on choisit une bonne fonction de hachage, les clés sont bien réparties, et le coût moyen des différentes opérations est $\mathcal{O}(1+\alpha)$, où $\alpha = \frac{n}{m}$ est le taux de remplissage, i.e. la taille moyenne des listes chaînées stockées dans les alvéoles.

Si l'on peut estimer à l'avance le nombre maximal $n$ de clés que contiendra le dictionnaire, on peut fixer $m = n$ à la création et donc avoir des opérations en $\mathcal{O}(1)$ en moyenne. On peut également redimensionner le dictionnaire au cours de l'exécution, afin de contrôler $\alpha$. Le taux de remplissage représente un ***compromis temps-mémoire*** : Si $\alpha$ est très petit, alors la table est peu remplie, donc il y a peu de collisions et les opérations sont rapides, mais la mémoire utilisée est bien supérieure à celle nécessaire. Si $\alpha$ est très grand, alors le tableau est très rempli, avec de nombreuses collisions, et les opérations sont lentes, mais le gaspillage de mémoire est minime.

En pratique, en redimensionnant et en gardant $\alpha$ borné convenablement, on obtient des bonnes performances en mémoire et en temps. On peut considérer que les tables de hachage ont des complexités en temps constant : c'est une implémentation extrêmement efficace et très utilisée en pratique.

**Exemple 11.** Dans l'implémentation C de Python, les dictionnaires sont implémentés par des tables de hachage avec gestion des collisions par chaînage. Si on regarde dans le code source [1], on peut voir que la taille des tables n'est pas fixée : elle est de 16 initialement, et le taux de remplissage $\alpha$ est gardé entre 10% et 50%, en redimensionnant la table lorsqu'elle est trop ou pas assez remplie.

1. github.com/python/cpython/blob/main/Python/hashtable.c

## B Choix d'une fonction de hachage

**Exemple 12.** Si $K$ est un ensemble de chaînes de caractères, on peut considérer la fonction :

$$h : k = k_0 k_1 \dots k_{l-1} \mapsto \sum_{i=0}^{l-1} k_i 256^i \mod m$$

Autrement dit, on considère, comme évoqué plus haut, que $k$ représente un entier en base 256, et on prend le résultat modulo $m$.

Le problème de cette fonction est que si $m$ est pair, alors $k$ et $h(k)$ auront toujours la même parité. Par exemple, les mots finissant par 'e' seront toujours hachés vers les cases d'indice impair, car 'e' vaut 101 en ASCII. De manière plus générale, si $m$ est multiple de $2^p$ alors seuls les $p$ derniers bits de $k$ joueront dans le calcul de $h(k)$.

On souhaite trouver des fonctions de hachage étant "assez aléatoires". De bons critères (liste non exhaustive) pour une fonction de hachage sont :

— Peu de collisions, et difficile de les trouver

— Fait intervenir tous les bits de la représentation de manière équitable

— Temps d'exécution court

Il existe de très nombreux algorithmes de hachage [2] dont certains servent plutôt en cryptographie que pour les tables de hachage.

La méthode de l'exemple précédent, consistant à considérer la clé comme un entier, et à prendre le reste modulo $m$, s'appelle méthode par ***division***.

2. en.wikipedia.org/wiki/ List_of_hash_functions

## C Opérations additionnelles

On peut vouloir munir la structure abstraite de dictionnaire d'opérations supplémentaires. Par exemple, si l'ensemble $K$ des clés est muni d'un ordre, étant donné une borne $k_0 \in K$, obtenir la liste des couples $(k, v) \in D$ tels que $k < k_0$.

De manière plus générale, on peut vouloir ***itérer*** sur les valeurs d'un dictionnaire $D$, soit dans un ordre arbitraire, soit selon un ordre précis défini sur $K$, soit par ordre d'insertion des clés-valeurs. L'implémentation des dictionnaires par liste chaînée permet de réaliser facilement les deux premières opérations, car la structure chaînée permet naturellement de parcourir les entrées du dictionnaire une à une. Cependant, pour les tables de hachage, la position des couples dans la table n'est pas corrélée à l'ordre d'insertion, où à un quelconque ordre sur $K$. On peut tout de même itérer dans un ordre quelconque. Par exemple pour afficher le contenu du dictionnaire :

**Algorithme 8 :** Affichage de table de hachage

**Entrée(s) :** $T$ table de hachage par chainage à $m$ alvéoles

```
1 pour i = 0 à m − 1 faire
2     m ← tete(T[i]);
3     tant que m ≠ NULL faire
4         Afficher m.k et m.v;
5         m ← suivant(m);
```

Ce schéma algorithmique, consistant à parcourir chaque liste chaînée de la table, permet de répondre à de nombreuses requêtes : trouver la clé minimale d'un dictionnaire, renvoyer la liste des clés, la liste des valeurs, copier un dictionnaire, etc...

En utilisant d'autres types de structures, les ***arbres*** (voir chapitre 7), on peut obtenir des dictionnaires où les couples (clé, valeur) sont stockés en respectant l'ordre des clés. Ainsi, certaines requêtes (trouver la clé minimale, renvoyer les clés dans un certain intervalle), se font avec une meilleure complexité que les tables de hachage.