PRODUIT VECTORIEL

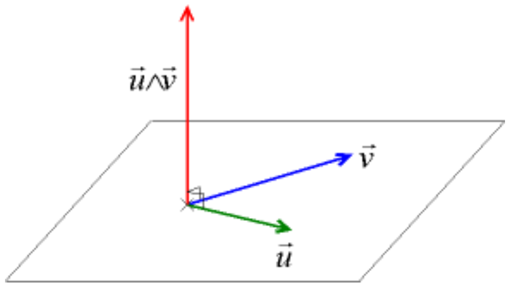
(d'après Wikipédia)

I. Définition

On se place dans le référentiel R.

D'un point de vue géométrique, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

- **le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs donnés ;**
- **la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est de sens direct;**
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u},\vec{v})|$



Notations:

Plusieurs notations sont en concurrence pour le produit vectoriel :

- En France, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est noté $\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}}$.
- Dans la littérature anglophone (et au Canada francophone, ainsi qu'en Suisse), le produit vectoriel est noté $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}}$.

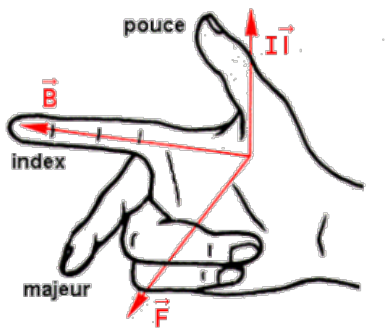
Cas particuliers :

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

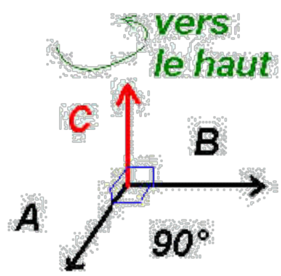
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si la norme de leur produit vectoriel est égale au produit de leurs normes.

Orientation du produit vectoriel:

La notion d'orientation peut ici être comprise de manière élémentaire en utilisant la **règle de la main droite**: le pouce, l'index et le majeur écartés en un trièdre indiquent respectivement le sens de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$. Cette définition est surtout utilisée dans l'enseignement secondaire.



On trouve aussi la **règle du tir bouchon** (utilisée en Electromagnétisme): Si on imagine que l'on fait tourner un tire-bouchon de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, alors on visse dans la direction de $\vec{w}$.



Définition avec les coordonnées des vecteurs:

Notons les coordonnées $\vec{u} = (u_x,\ u_y,\ u_z)$ et $\vec{v} = (v_x,\ \mathrm{v}_y,\ \mathrm{v}_z)$ des deux vecteurs. Leur produit vectoriel est donné par :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}}$$

Cette identité pourrait être prise comme une seconde définition.

II. Propriétés

Le produit vectoriel est un produit distributif, anticommutatif, non associatif :

- Distributivité sur l'addition :

$$\boxed{\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}}$$

- Compatibilité avec la multiplication par un scalaire:

$$\boxed{\lambda\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \left(\lambda \vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(\lambda \vec{b}\right)}$$

- Antisymétrie:

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}}$$

- Non associativité:

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$$

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition du produit vectoriel.

Egalité du double produit vectoriel (ou identité de Lagrange):

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

Démonstration:

Soient $\vec{a} = (a_x,\ \mathrm{a}_y,\ \mathrm{a}_z)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y,\ \mathrm{b}_z)$ et $\vec{c} = (c_x,\ \mathrm{c}_y,\ \mathrm{c}_z)$

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} (a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x \\ (a_x c_x + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_z b_z) c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y) b_z - (a_x b_x + a_y b_y) c_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x \\ (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_z - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$

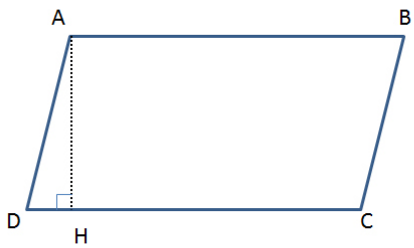
D'ou: $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

Le produit vectoriel satisfait l'identité de Jacobi:

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)+\vec{b}\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)+\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\vec{0}$$

Cette propriété découle de la précédente.

III. Applications immédiates en géométrie



1) Aire d'un parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme.

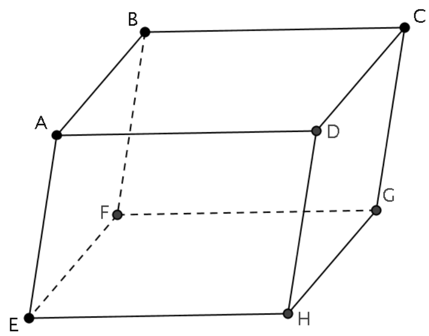
Son aire est:

$$S = AB.AH = AB.AD.\cos(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH}) = AB.AD.\sin(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = \left\|\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$$

On aurait pu aussi écrire en changeant de côté: $S=\left\|\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|$

Ainsi **l'aire du parallélogramme ABCD est égale à la norme du produit vectoriel de deux vecteurs sur lesquels il s'appuie** : $S=\left\|\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$

2) Volume d'un parallélépipède



Soit S l'aire de la face ABCD.

Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal au produit de l'aire par la hauteur AI où I est le projeté orthogonal de A sur EFGH:

$$V = AI.S$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire orthogonal au plan EHGF et dirigé vers l'autre face.

On a $AI = \overrightarrow{EA}.\vec{u}$

Alors $V = (\overrightarrow{EA}.\vec{u})S = \overrightarrow{EA}.(S\,\vec{u}) = \overrightarrow{EA}.(\|\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}\|) = \overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF})$

Le volume du parallélépipède est : $V = \overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF})$

On aurait pu bien sûr utiliser les points de n'importe quelle autre face.
Par exemple :

$V = \overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$

Volume d'un parallélépipède : Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les 3 vecteurs ayant pour origine le même sommet d'un parallélépipède, le volume de celui-ci est :

$$V = \left|\vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right|$$

3) Produit mixte

On appelle produit mixte la quantité scalaire : $\vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$

On a la propriété suivante :

$$\boxed{\vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right) = \vec{c}.\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)}$$

Démonstration : cf ce qui a été écrit pour le volume d'un parallélépipède.