TD7: Induction et ordres
Correction

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 1.

Diagrammes de Hasse

Q1. $\mathcal{R}$ n'est **pas réflexive** : par exemple a n'est pas en relation avec lui-même. $\mathcal{R}$ n'est **pas symétrique** car $c\mathcal{R}a$ mais a n'est pas en relation avec c. $\mathcal{R}$ n'est **pas transitive** car $f\mathcal{R}c\mathcal{R}a$ mais f n'est pas en relation avec a. $\mathcal{R}$ est **anti-symétrique**, car $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$: en effet, il n'existe aucun couple $(x, y) \in X^2$ vérifiant l'hypothèse $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Q2. $\mathcal{R}^2$ est la composée de $\mathcal{R}$ avec elle-même, c'est dire qu'elle met en relation tous les éléments de X distants d'exactement deux flèches. Elle contient donc :

$$\{(g, c), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b), (f, a), (f, b)\}$$

Q3. La clôture transitive de $\mathcal{R}$ contient tous les couples $x, y \in X$ tels qu'il existe un chemin dans le diagramme entre x et y suivant les flèches. $\leq$ est réflexive et transitive car c'est la clôture réflexive et transitive d'une relation. Montrons qu'elle est antisymétrique. Soient $x, y \in X$ avec $x \leq y \leq x$. Alors, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x\mathcal{R}^{n_1}y$, et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $y\mathcal{R}^{n_2}x$. Supposons par l'absurde que $x \neq y$. Alors, $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$. Donc, $x\mathcal{R}^{n_1+n_2}x$ et $n_1 + n_2 > 0$. Or, il n'existe pas de chemin entre x et lui-même utilisant un nombre strictement positif de flèches : c'est absurde. Donc, $x = y$.

Q4. On a :

- A admet deux éléments minimaux : d et e. En effet, il n'existe pas d'élément $x \in A$ tel que $x < d$ ou tel que $x < e$. De même, A admet un élément maximal : c.
- Comme A admet deux éléments minimaux, elle ne peut pas admettre de plus petit élément. En revanche, son élément unique maximal, c, est un plus grand élément : en effet, $c \geq c$, $c \geq d$ et $c \geq e$.
- A n'admet qu'un seul minorant : g. En effet, c'est le seul élément de X qui est inférieur à c, d et e. En revanche, A admet plusieurs majorants : a, b et c.
- A admet une borne inférieure : g. En effet, c'est le plus grand des majorants (c'est le seul). De même, c est borne supérieure car c'est le plus petit des minorants de A.

Q5. Diagrammes de Hasse :

a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ muni de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$: c'est un ordre linéaire, on aura $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$.

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 60\}$ muni de la relation de divisibilité : on peut organiser le dessin en "trois dimensions" : une pour chaque nombre premier dans la décomposition de 60 (2, 3, 5). On positionne 1 tout en bas, puis lorsque l'on suit un axe, on multiplie par le nombre correspondant. On obtient donc deux cubes juxtaposés.

c) $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ muni de l'inclusion : c'est le même principe, un axe par nombre (0, 1 et 2), et on obtient un cube.

Q6. ...

Q7. ...

Exercice 2. *Isomorphismes 1*

Q1. On pose $f : X \to Y$ avec $f(A) = (1_A(a), 1_A(b), 1_A(c))$ où 1_A est la fonction caractéristique de A. Montrons que c'est bien un isomorphisme d'ordres. Tout d'abord, elle est bijective, sa réciproque est $g : Y \to X$ avec $g((x_a, x_b, x_c)) = \{u \in \{a, b, c\} | x_u = 1\}$.
Ces deux fonctions sont bien croissantes :

— Montrons la croissance de f. Soient $A, A' \in X$ avec $A \subseteq A'$. Alors, $1_A(u) \leq 1'_A(u)$ pour $u \in \{0, 1, 2\}$. En effet :
  — Si $1_A(u) = 1$ alors $u \in A$ et donc $u \in A'$, et donc $1_{A'}(u) = 1$
  — Sinon, $1_A(u) = 0$

  Dans les deux cas, $1_A(u) \leq 1_{A'}(u)$. Donc, $f(A) \leq f(A')$.

— La croissance de g se montre de manière analogue.

Q2. On remarque que $30 = 2.3.5$. On pose $p_a = 2, p_b = 3, p_c = 5$. On pose $f : X \to Y$ telle que $f(A) = \prod_{u \in A} p_u$. La démonstration que c'est un isomorphisme est analogue à la question précédente.

Exercice 3. *Théorème de Knaster-Tarski*

Q1. Soit $(X, \leq)$ un treillis complet. X est non vide, et $X \subseteq X$ donc X admet une borne inférieure $\perp$ et une borne supérieure $\top$, et comme X est l'ensemble tout entier, $\top$ et $\perp$ sont dans X : ce sont respectivement le plus grand et le plus petit élément de X.

Q2. a) $\{0, 1, 2, 3\}$ muni de l'ordre naturel des entiers : les bornes sont données par le min et le max.

b) $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ pour E ensemble quelconque : les bornes sont données par l'intersection et l'union

c) $(\mathbb{N}, |)$: les bornes sont données par le pgcd et le ppcm. Dans le cas d'une partie $X \subseteq \mathbb{N}$ infinie, la borne supérieure $\bigvee X$ vaut 0.

Q3. $\top \in P$ car $f(\top) \leq \top$: P est non-vide.

Q4. Soit $x \in P$. Montrons que $f(\bigwedge P) \leq x$.
$\bigwedge P \leq x$ car $x \in P$. Donc, par croissance de f, $f(\bigwedge P) \leq f(x)$, et $f(x) \leq x$ car $x \in P$. Donc $f(\bigwedge P) \leq x$. $f(\bigwedge P)$ est bien un minorant de P.

Q5. Montrons que $f(\bigwedge P) = P$ par double inégalité.
$f(\bigwedge P)$ est un minorant de P, et $\bigwedge P$ est le plus grand des minorants de P, donc $f(\bigwedge P) \leq \bigwedge P$.
On en déduit également que $\bigwedge P \in P$. De plus, par croissance de f, $f(f(\bigwedge P)) \leq f(\bigwedge P)$. Donc, $f(\bigwedge P) \in P$, et par définition de $\bigwedge P$, $\bigwedge P \leq f(\bigwedge P)$.
Finalement, il y a égalité : c'est un point fixe. C'est bien le plus petit car tout point fixe de f appartient également à P.

Q6. Montrons que l'ensemble PF des points fixes de f est un treillis complet. Soit $A \subseteq PF$ non vide. Montrons que A admet une borne inférieure dans PF. A est une partie de X donc admet une borne inférieure $\bigwedge A \in X$. Il suffit de montrer que $\bigwedge A \in PF$, i.e. que $f(\bigwedge A) = \bigwedge A$. La suite de la démonstration est presque identique à la question précédente.
Pour la borne sup, il suffit de considérer $\bigvee A$, et la preuve est symétrique.

Exercice 4. *Composition de relations*

Q1. Soient $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ deux relations binaires sur X. Leur composition $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$ est la relation binaire sur X définie par :

$$\forall x, y \in X, x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}')y \Leftrightarrow \exists z \in X, x\mathcal{R}z\mathcal{R}'y$$

Q2. Montrons que la composition est associative. Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ trois relations binaires sur X. Montrons que :

$$\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$$

Soient $x, y \in X$.

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)y & \Leftrightarrow & \exists u \in X, x\mathcal{R}_1 u(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3)y \\ & \Leftrightarrow & \exists u, v \in X, x\mathcal{R}_1 u\mathcal{R}_2 v\mathcal{R}_3 y \\ & \Leftrightarrow & \exists v \in X, x(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)v\mathcal{R}_3 y \\ & \Leftrightarrow & x(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3 y \end{array}$$

Q3. La relation d'égalité $=_X$ est le neutre de la composition. En effet, si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur X, et $x, y \in X$, alors :

$$\begin{array}{rcl} x(\mathcal{R}\circ =_X)y & \Leftrightarrow & \exists z \in X, x\mathcal{R}z =_X y \\ & \Leftrightarrow & x\mathcal{R}y \end{array}$$

Et idem pour montrer que $=_X \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

Exercice 5. *Unions ordonnées*

Exercice 6. *Mi casa es tu casa*

On considère la fonction d'Ackermann définie sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m=0 \\ A(m-1,1) & \text{si } n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Q1. Les appels récursifs causés par la fonction A se font sur des entrées strictement plus petites pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$. En effet, si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, considérons les appels récursifs causés par l'appel $A(m,n)$:

- Si $m = 0$, aucun appel récursif n'est causé.
- Sinon et si $n = 0$, un appel récursif est causé sur $(m-1,1)$, et $(m-1,1) < (m,0)$ selon l'ordre lexicographique.
- Si $m > 0$ et $n > 0$, alors deux appels récursifs sont causés. Le premier est $A(m, n-1)$, et $(m, n-1) < (m,n)$. Le deuxième est $A(m-1,x)$ avec $x = A(m,n-1)$, et $(m-1,x) < (m,n)$.

Q2. Montrons par induction bien fondée sur $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre lexicographique que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, P(m,n) : A(m,n) \geq m+n+1$.

- Si $m = 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $A(m,n) = A(0,n) = n+1 = m+n+1$
- Si $n = 0$, et $m \in \mathbb{N}^*$, $A(m,n) = A(m,0) = A(m-1,1)$. Par hypothèse d'induction, comme $(m-1,1) < (m,0)$ pour l'ordre lexicographique, $P(m,0)$ est vraie : $A(m-1,1) \geq m-1+1+1 = m+1$. Donc $A(m,n) \geq m+1 = m+n+1$.
- Si $m, n \in \mathbb{N}^*$, alors $A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1))$. Le couple $(m-1, A(m,n-1))$ est strictement plus petit que (m,n), donc par hypothèse d'induction, $A(m-1, A(m,n-1)) \geq m-1+A(m,n-1)+1$. A nouveau par hypothèse d'induction, on a donc $A(m,n) \geq m-1+m+n-1+1+1 = 2m+n \geq m+n+1$.

Finalement, la propriété est vraie sur tout $\mathbb{N}^2$.

Q3. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, A(3,n) \geq 2^n$. Pour cela, il peut être utile de montrer un résultat intermédiaire (aussi par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}, A(2,n) \geq 2n$.

Exercice 7. *Étude de fonction*

Exercice 8. *Ordre méthodique*

Soit Σ un alphabet fini, muni d'un ordre $\leq$

Q1. $u < v \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ avec $i \leq |u|$ et $i \leq |v|$, et $u_j = v_j$ pour $j < i$, et $(u_i < v_i)$.

Q2. Notons a, b deux éléments distincts de Σ avec $a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = a^n b$. u_n est une suite strictement décroissante dans Σ^* pour l'ordre lexicographique : il n'est pas bien fondé.

Q3. Montrons que la relation $\leq_M$ est bien un ordre. Remarquons que si $u, v \in \Sigma^*$ avec $u \leq_M v$, alors $|u| \leq |v|$.

- Réflexivité : il est clair que pour tout $u \in \Sigma^*$, $u \leq_M u$, car $|u| = |u|$ et $u \leq_L u$.

— Transitivité : Soient $u, v, w \in \Sigma^*$ avec $u \leq_M v \leq_M w$. Si $|u| = |v| = |w|$ alors $u \leq_L v \leq_L w$, et donc $u \leq_L w$, donc $u \leq_M w$. Sinon, alors forcément $|u| < |w|$, et donc $u \leq_M w$.

— Anti-symétrie : Soient $u, v \in \Sigma^*$ tels que $u \leq_M v$ et $v \leq_M u$. Alors, $|u| \leq |v| \leq |u|$, donc les deux mots sont de même longueur. Donc, $u \leq_L v \leq_L u$, et comme $\leq_L$ est un ordre, cela implique que $u = v$.

Montrons maintenant que l'ordre est bien fondé. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\Sigma^*)^{\mathbb{N}}$, strictement décroissante pour $\leq_M$. Notons $l = |u_0|$. Tous les mots u_n sont de longueur au plus l pour $n \in \mathbb{N}$. Donc, la suite peut prendre au plus $|\Sigma|^l + |\Sigma|^{l-1} + \cdots + |\Sigma| + 1$ valeurs : elle ne peut pas être strictement décroissante.

Exercice 9.

Isomorphismes 2