TD Méca Q

Exo 1. Effet photoélectrique

1) Le photon doit avoir une énergie suffisante pour arracher un électron : $\frac{hc}{\lambda} \geq W_0$ où W_0 travail d'extraction de l'électron

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda \leq \frac{hc}{W_0}}$$

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{W_0} = \frac{6{,}64.10^{-34} \times 3.10^8}{2{,}25 \times 1{,}6.10^{-19}} = 5{,}53.10^{-7}\,m = 553\,nm$$

$$\boxed{\lambda \leq 553\,nm}$$

- Pour $\lambda_1 = 490\,nm$, c'est possible, mais pas pour $\lambda_2 = 660\,nm$.

2) Énergie de l'électron = énergie du photon − travail d'extraction.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda_1} - W_0\right)} = 3{,}2.10^5\,m/s}$$

Rem : On a bien $v \leq 0{,}1.c$: L'électron n'est pas relativiste.

3). Le rendement quantique est le rapport du nombre d'e^- émis sur le nombre de photons reçus sur le même intervalle de temps.

- On donne la puissance du rayonnement lumineux :

$$P = \frac{\text{énergie}}{\Delta t} = \frac{\text{énergie d'un photon} \times \text{nbre de photons}}{\Delta t}$$

$$= \frac{hc}{\lambda_1} \times \frac{\text{nbre de photons}}{\Delta t}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\text{nbre de photons}}{\Delta t} = \frac{P\lambda_1}{hc} = 2{,}21.10^{12}\,s^{-1}}$$

- On donne l'intensité du courant électrique :

$$I = \frac{\text{charge}}{\Delta t} = \frac{e \times \text{nbre d'électrons}}{\Delta t}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\text{nbre d'électrons}}{\Delta t} = \frac{I}{e} = 2{,}50.10^{11}\,s^{-1}}$$

- D'où le rendement quantique $\boxed{r = \frac{\text{nbre d'}e^-/\Delta t}{\text{nbre de photons}/\Delta t} = 0{,}113}$

Exo II Nbre de photons

1) Flux solaire :

$$\Phi_S = \frac{\text{Puissance}}{\text{surface } S} = \frac{\text{énergie}}{\Delta t \cdot S} = \frac{\text{énergie d'un photon} \times \text{nbre de photons reçus}}{\Delta t \cdot S} = \frac{hc}{\lambda_m S} \times \frac{\text{nbre de photons reçus}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{nbre de photons reçus} = \frac{\Phi_S \lambda_m S \Delta t}{hc} = 2{,}5.10^{21}}$$

pour 1 m^2 pendant 1 s.

2) Pour l'étoile : $m = m_0 + 2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)$

Pour le Soleil : $m_S = m_0 + 2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_0}{\Phi_S}\right)$

$$\Rightarrow m - m_S = 2{,}5 \log\left(\frac{\Phi_S}{\Phi}\right) \Leftrightarrow \boxed{\Phi = \Phi_S . 10^{(m_S - m)/2{,}5} = 4{,}8.10^{-11}\,W.m^{-2}}$$

D'où le nbre de photons reçus $\boxed{N = \frac{\Phi \lambda_m S' \Delta t}{hc} = 4{,}6.10^3}$ pour $\Delta t = 1\,s$

$\left(S' = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}9.10^{-5}\,m^2\right)$

Exo3. Atome de Bohr

1) · Dans le modèle de Bohr (modèle semi-classique, c'est-à-dire qu'on utilise un modèle de mécanique classique pour obtenir des résultats de mécanique quantique), l'électron décrit des orbites circulaires de rayon r.

Syst: électron Π de masse m, charge $-e$
Réf. du labo supposé galiléen, centré sur le noyau O
BdF. interaction coulombienne $\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{O\Pi}}{r^3}$

RFD: $m\vec{a} = \vec{f} \Leftrightarrow m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{r}\vec{u_n}\right) = +\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u_n}}{r^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

↳ Le mouvement est uniforme et $\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}}$

2) Bohr introduisit l'hypothèse de la quantification de $\vec{L_O}(\Pi)$:
$\vec{L_O}(\Pi) = \vec{O\Pi} \wedge m\vec{v} = r\vec{u_n} \wedge mv\vec{u_\theta} = mrv\,\vec{u_z}$.
$\|\vec{L_O}\| = mrv$

Hypo de Bohr: $\boxed{\exists n \in \mathbb{N}^* \quad mrv = \frac{nh}{2\pi}}$

3). Alors: $mr\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}} = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow \boxed{r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2}$

Pour $n = 1$, $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

$$\Rightarrow \boxed{r_1 = \frac{(4\pi\varepsilon_0)h^2}{4\pi^2 m e^2} = 5{,}3.10^{-11}\,m = 53\ pm}$$

On appelle $\boxed{a_0 = 53\ pm}$, rayon de Bohr, ce rayon.

Alors $\boxed{r_n = a_0 n^2 \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*}$

4) Energie du photon: $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$ (de la forme $\frac{k}{2a}$)

$\Rightarrow E_n = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\pi m e^2}{\varepsilon_0 h^2 n^2}\right) \Leftrightarrow \boxed{E_n = \frac{-me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}}\ n \in \mathbb{N}^*$

Le premier niveau d'énergie est $\boxed{E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -2{,}18.10^{-18}\,J = -13{,}6\ eV}$

5) On appelle énergie d'ionisation, notée E_0 l'énergie minimale à fournir pour arracher l'électron à l'atome H.

$\Delta E \geq E_\infty - E_1 \Rightarrow \Delta E \geq -E_1$

↳ $\boxed{E_0 = -E_1 = 13{,}6\ eV}$

6)

Alors $\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*}$

7) Si l'électron passe de E_p à E_n en émettant un photon, l'énergie de celui-ci vaut $E_p - E_n$.

$\frac{hc}{\lambda} = E_p - E_n$

$\frac{hc}{\lambda} = -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2}$

$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)}$

avec $\frac{E_0}{hc} = 1{,}09.10^7\ m^{-1}$: on retrouve la constante de Rydberg: $\boxed{R_H = 1{,}09.10^7\ m^{-1} = \frac{E_0}{hc}}$

· On retrouve la loi de Rydberg : $\boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)}$ où $p > n$

8) AN : pour une transition $E_4 \to E_2$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3\,R_H}{16}$$

$\boxed{\lambda = \frac{16}{3R_H} = 486 \text{ nm}}$ Dans le visible (bleu).

Alors l'énergie du photon est $\boxed{\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} = 4{,}10.10^{-19}\ J = 2{,}56\ eV}$

9) Série de Lyman $n_2 = 1$ et n_1 varie de 2 à $+\infty$.

Ce sont donc des longueurs d'onde telles que :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(1 - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

Comme n_1 varie de 2 à $+\infty$, n_1^2 varie de 4 à $+\infty$

$\frac{1}{n_1^2}$ —— 0 à 1/4

$1 - \frac{1}{n_1^2}$ —— $\frac{3}{4}$ à 1

$\frac{1}{\lambda}$ —— $\frac{3}{4}R_H$ à R_H

$\boxed{\lambda \text{ —— } \frac{1}{R_H} \text{ à } \frac{4}{3R_H}}$

AN : $\boxed{92 \text{ nm} \leq \lambda \leq 122 \text{ nm}}$.

Aucune de ces raies n'est dans le visible.

Série de Balmer $n_2 = 2$ et n_1 varie de 3 à $+\infty$.

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

n_1^2 —— 9 ——

$\frac{1}{n_1^2}$ —— 0 à $\frac{1}{9}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{n_1^2}$ —— $\frac{5}{36}$ à $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{\lambda}$ —— $\frac{5}{36}R_H$ à $\frac{R_H}{4}$

$\boxed{\lambda \text{ varie entre } \frac{4}{R_H} \text{ et } \frac{36}{5R_H}}$.

AN $\boxed{367 \text{ nm} \leq \lambda \leq 661 \text{ nm}}$

↳ OK, on a bien des raies dans le visible

Plus précisément on remarque λ diminue quand n_1 augmente.

Raie entre E_3 et E_2 : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36}R_H$

$\boxed{\lambda = \frac{36}{5R_H} = 661 \text{ nm}}$

Raie entre E_4 et E_2 : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3R_H}{16}$

$\boxed{\lambda = \frac{16}{3R_H} = 489 \text{ nm}}$

Raie entre E_5 et E_2 : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{21\,R_H}{100}$

$\boxed{\lambda = \frac{100}{21\,R_H} = 437 \text{ nm}}$

Raie entre E_6 et E_2 : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6^2}\right) = \frac{2}{9}R_H$

$\boxed{\lambda = \frac{9}{2R_H} = 413 \text{ nm}}$

Raie entre E_7 et E_2 : $\lambda = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7^2}\right) = \frac{45\,R_H}{196}$

$\boxed{\lambda \simeq \frac{196}{45.R_H} = 400 \text{ nm}}$.

En dessous, les raies ne seront plus dans le visible.

Exo 4 Caféine

1) $A = \ell\,\varepsilon\,[\text{caféine}]$. On choisit $\lambda = 271$ nm pour avoir

$\varepsilon(\lambda)$ le plus grand possible.

2) Avec les mesures d'absorbance effectuées, on construit la courbe d'étalonnage : $A = \ell\varepsilon\,[\text{caféine}]$.

On obtient $\boxed{A = 0{,}03 \cdot [\text{caféine}]}$ avec [caféine] en mg/L.

3) On mesure avec la tasse de thé dilué $A = 0{,}45$. On en déduit $[\text{caféine}] = \frac{A}{0{,}03} = \boxed{15\ \text{mg/L} \text{ dans le thé dilué} \times 20}$.

On en déduit qu'il y a $20 \times 15 = \boxed{300\ \text{mg/L de caféine}}$ dans la tasse de 200 mL de thé préparé ; donc $0{,}2 \times 300 = \boxed{60\ \text{mg}}$ de caféine dans 200 mL de thé.

4) De même on mesure $A = 0{,}90$ dans la tasse de café dilué,

soit $\frac{0{,}90}{0{,}03} = \boxed{30\ \text{mg/L dans le café dilué}}$ $50\times$,

donc $50 \times 30 = \boxed{1500\ \text{mg/L dans le café}}$ non dilué.

Ce qui donne $40 \cdot 10^{-3} \times 1500 = \boxed{60\ \text{mg dans la tasse}}$ d'expresso.

Il y a autant de caféine dans une grande tasse de thé que dans un expresso !

Exo 4. Longueur d'onde de De Broglie

1) $\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 1{,}3 \cdot 10^{-35}\ \text{m}$

On a $\lambda_{DB} \ll 0{,}80$ m : effets quantiques non sensibles

2) $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$ et $E_c = \frac{p^2}{2m} \Leftrightarrow p = \sqrt{2mE_c}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 3{,}13 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} \simeq a = 3{,}98 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$

λ_{DB} est de l'ordre de grandeur de a : Les effets quantiques doivent être pris en compte.

Exo 5. Diffraction

1) On observe une figure de diffraction, typique des ondes.

2) RX $\simeq 10^{-11}$ m : on a bien des longueurs d'onde du même ordre de grandeur que la taille des atomes : OK.

3) On accélère les électrons sous la tension U.

ThEc sur 1 électron, dans le référentiel du labo supposé galiléen, entre l'état initial (électron au repos) et l'état final :

$$\Delta E_c = eU$$

$$\Rightarrow E_c = eU$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m} = eU \Leftrightarrow \boxed{p = \sqrt{2meU} = 1{,}7 \cdot 10^{-23}\ \text{kg m/s}}$$

. D'où la longueur d'onde de De Broglie :

$\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = 3{,}9 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \simeq 4 \cdot 10^{-11}\ \text{m}}$.

Là encore, on a une longueur d'onde de la taille des atomes : Les ondes de matière associées aux électrons vont diffracter sur le cristal de Nickel.

Exo 7 . Interférences

1) On observe des impacts sur l'écran dus à l'aspect corpusculaire, et une figure d'interférences due à l'aspect ondulatoire.

2) On mesure l'interfrange : $5i \simeq 1\,cm \Leftrightarrow i = 2\,mm$

Comme $i = \frac{\lambda D}{d}$ où i : interfrange

λ : longueur d'onde

D : distance entre le plan des fentes et l'écran ($D \simeq 0{,}85\,m$)

d : distance entre les 2 fentes ($= 6\,\mu m$),

$$\boxed{\lambda = \frac{i d}{D} = 14\,mm}$$

3) $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} \Rightarrow \boxed{v = \frac{h\,N_A}{M\,\lambda} = 1{,}4\,m/s}$

$v \approx 1\,m/s$

Rem Le calcul exact est ⊕ compliqué, la vitesse des atomes va augmenter au cours de la chute et donc leur longueur d'onde va varier : on n'aura pas la même λ au niveau des fentes et au niveau de l'écran...

Exo 8 Puits de potentiel infini

1) $dP = |\psi|^2 dx = A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx$.

- La probabilité est nulle en $x = 0$: l'expression proposée est bien cohérente avec la condition limite en $x = 0$.
- Elle doit aussi être nulle en $x = L$: $\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*}$

2) $\psi = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega t}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Condition de normalisation : $\int_0^L dP = 100\%$

$\hookrightarrow A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$

$$\frac{A^2}{2} \int_0^L 2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$\frac{A^2}{2} \int_0^L \left(1 - \cos\left(2n\frac{\pi x}{L}\right)\right) dx = 1$$

$$\frac{A^2}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(2n\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L = 1$$

$$\frac{A^2 L}{2} = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

D'où $\boxed{\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega t}}$

3) $\boxed{|\psi_1|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$

$\boxed{|\psi_2|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}$

4) Relation de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \boxed{p = n\frac{h}{2L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*}$

5) $E = E_c + E_p$ et $E_p = 0$ dans le puits.

↳ $E = \dfrac{p^2}{2m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_n = \dfrac{h^2}{8mL^2}\, n^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

6) $E_1 = \dfrac{h^2}{8mL^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J} = 15\ \mathrm{meV}$

$E_2 = 4\, E_1 = 61\ \mathrm{meV}$

$E_3 = 9\, E_1 = 0{,}14\ \mathrm{eV}$

Exo 9 Effet Compton

1) $E = hf$ et $p = \dfrac{hf}{c}$

2) $E(\text{photon incident}) = E(\text{photon émis}) + E(\text{électron mis en mvt})$

$\boxed{hf = hf' + \dfrac{p^2}{2m_e}}$ loi de conservation de l'énergie ①, pour un système isolé.

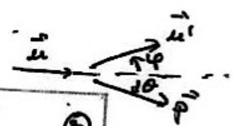
3) L'ensemble (photon, électron) étant supposé isolé, on peut écrire la 2nde loi de Newton : $\dfrac{d\vec{p}\,(\text{système})}{dt} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{p}\,(\text{syst}) = \vec{\text{cste}}$.

∴ On peut écrire la conservation de la quantité de mvt :

$\vec{p}\,(\text{photon incident}) + \vec{p}\,(\text{électron ~~au~~ repos}) = \vec{p}\,(\text{photon émis}) + \vec{p}\,(e^- \text{ mis en mvt})$:

$\dfrac{hf}{c}\vec{u} = \dfrac{hf'}{c}\vec{u}' + \vec{p}$



Par projection :
$$\begin{cases} \dfrac{hf}{c} = \dfrac{hf'}{c}\cos\theta + p\cos\varphi & ② \\ 0 = -\dfrac{hf'}{c}\sin\theta + p\sin\varphi & ③ \end{cases}$$

4) ②^2 + ③^2 permet d'éliminer φ et d'exprimer $p_e = \|\vec{p_e}\|$ en f$^{\text{on}}$ de h, f, f' et θ.

$(p_e)^2 = \left(\dfrac{hf}{c} - \dfrac{hf'\cos\theta}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{hf'\sin\theta}{c}\right)^2$

$\Leftrightarrow \boxed{(p_e)^2 = \dfrac{h^2f^2}{c^2} + \dfrac{h^2f'^2}{c^2} - \dfrac{2h^2ff'\cos\theta}{c^2}}$. A réinjecter dans ①.

Il vient $f - f' = \dfrac{h}{2mc^2}\left(f^2 + f'^2 - 2ff'\cos\theta\right)$.

L'écart observé entre f et f' reste faible. Notons $\Delta f = f - f'$.

$\Leftrightarrow f' = f - \Delta f$ où $|\Delta f| \ll f$.

$$\Delta f = \frac{h}{2mc^2}\left[f^2 + (f - \Delta f)^2 - 2f(f - \Delta f)\cos\theta\right]$$

$$\Delta f \simeq \frac{h}{2mc^2}\left[f^2 + f^2 - 2f\Delta f + \underbrace{(\Delta f)^2}_{\text{négligeable}} - 2f^2\cos\theta + 2f\Delta f\cos\theta\right]$$

$$\Delta f \cdot \left[1 + \frac{h}{mc^2} f (1 - \cos\theta)\right] = \frac{hf^2}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

$\dfrac{hf}{mc^2} \simeq \dfrac{7 \cdot 10^{-34} \cdot f}{10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \simeq 10^{-20} f$.

avec f de l'ordre de 10^{16} à 10^{18} Hz.

$\Rightarrow \dfrac{hf}{mc^2} \sim 10^{-4}$ à 10^{-2} → négligeable devant 1.

↳ $\boxed{\Delta f = f - f' \simeq \dfrac{hf^2}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$.

5) On observe une diminution de la fréquence du photon.

D'après (1) $p_e'^2 = 2mh(f-f')$

$\Rightarrow p_e'^2 = \dfrac{2h^2f^2}{c^2}(1-\cos\theta)$

E_c peut d'autant (+) vite que $\cos\theta$ est petit et

donc θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\boxed{p_e' = p_{e\,max} = \sqrt{2}\,\dfrac{hf}{c}}$