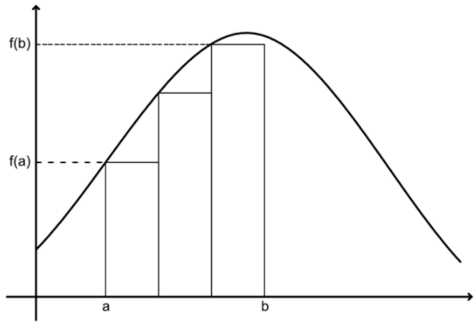
Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

Rappelons le programme officiel :

3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.

I. Méthode

Considérons une fonction qui à x associe f(x) et traçons la courbe correspondante.



L'intégrale entre les valeurs a et b de f est :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

On comprend bien que le produit $f(x)dx$ correspond à l'aire d'un rectangle élémentaire de côtés f(x) et dx ; ainsi l'intégrale est l'aire sous la courbe.

Pour calculer cette intégrale, on décompose l'aire sous la courbe en une succession de petits rectangles et on somme leurs aires. Notez que plus le nombre de rectangles considérés est grand et plus l'aire calculée se rapprochera de la valeur de l'intégrale.

Méthode des rectangles :

- **On découpe l'intervalle [a ; b] en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$**
- **On considère chaque rectangle de côtés $f(a + k\frac{b-a}{n})$ et $\frac{b-a}{n}$, donc d'aire $f(a + k\frac{b-a}{n})$* $\frac{b-a}{n}$.**
- **On somme les aires de tous ces rectangles pour obtenir l'aire totale.**

D'où le script Python correspondant :

```
# Calcul de l'intégrale de f(x) entre a et b

def f(x):
        return …

a = 1                       # Borne d'intégration inférieure, à adapter
b = 2                       # Borne d'intégration supérieure, à adapter
n = 1000                            # Nombre de subdivisions, à adapter
integrale = 0               # Variable stockant la somme des aires

for k in range(0, n):
        largeur = (b-a)/n
        hauteur = f(a + k*(b-a)/n)
        aire = largeur * hauteur
        integrale = integrale + aire        # On ajoute l'aire calculée à la somme des aires déjà calculée
« intégrale »

print("L'intégrale vaut ", integrale)
```

Remarque : Je signale tout de même qu'il y a la fonction *quad* dans la bibliothèque scipy.integrate qui est très simple et efficace… Mais qui n'est pas au programme.

II. Exercices à faire

1) Illustration avec l'exo 5 du TD Chap 5 Systèmes conservatifs

Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2) Illustration avec le pendule simple

On a montré dans le cours que la période des oscillations du pendule simple entre les positions $-\theta_0$ et θ_0 est :

$$T = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$$

où T_0 désigne la période obtenue dans le cadre des petites oscillations.

a) Calculer T / T_0 par la méthode des rectangles pour θ_0 = 5°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°.
b) Tracer T/T0 en fonction de θ_0.

3) Troisième exemple

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.