TD11: Logique

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 1. *Calcul des propositions*

Le calcul des propositions est un exercice consistant à déterminer si une formule ϕ est satisfiable, si c'est une tautologie, ou si elle vérifie tout autre type de propriété. Pour cela, les deux méthodes principales sont la **simplification** et les **tables de vérité**.

La simplification consiste à appliquer des règles d'équivalence (comme les lois de De Morgan, l'associativité, le fait que $\top$ et $\bot$ sont neutres ou absorbants, etc...) pour réduire la formule autant que possible, de façon à ce qu'elle devienne simple, ou même triviale, à étudier.

L'utilisation de tables de vérité consiste à énumérer toutes les valuations possibles et à donner l'interprétation de la formule ou des formules étudiées afin de conclure. En effet, une formule est satisfiable si et seulement si au moins une ligne de sa table de vérité contient un 1 dans la colonne de sortie, et est une tautologie si et seulement si toutes les lignes de sa table de vérité ont un 1 dans la colonne de sortie.

Q1. En procédant par simplification, déterminer si les formules suivantes sont des tautologies, et si elles sont satisfiables :

1. $((X \land Y) \lor (X \land \neg Y)) \land (\neg X \lor Z)$
2. $X \land (Y \to (\neg Z \lor (X \land W))) \land (Y \lor \neg Z) \land (Z \lor \neg X) \land \neg W$
3. $(X \to \neg X) \land ((Y \to X) \to Y)$

Q2. A l'aide de tables de vérité, déterminer si les formules suivantes sont des tautologies, et si elles sont satisfiables, et déterminer une formule équivalente plus simple :

1. $(X \lor \neg Y) \land (Z \to Y) \land (Z \land \neg X)$
2. $(X \to (Y \land Z)) \land \neg Y \land (X \lor Z) \land (Z \lor Y)$
3. $(X \land \neg Y \land Z) \lor (\neg X \land \neg Z) \lor (Y \land X \land Z)$

Il est aussi possible d'utiliser des règles de simplification pour obtenir une formule plus légère, et d'utiliser une table de vérité pour finir.

Q3. Utilisez des règles de simplification pour faire disparaître les variables T et W et simplifier la formule suivante, puis utilisez une table de vérité pour déterminer si elle est satisfiable :

$$((V \land Y \land Z) \lor (\neg V \land Y \land Z)) \lor (W \to [\neg T \land ((X \land V) \lor (\neg X \land V))]) \lor \neg(Y \to (X \to Z))$$

Exercice 2. *Modélisation*

Alma, Basile et Clara vont au restaurant ensemble :

1. Si Alma commande un dessert, Basile en commande un aussi.
2. Basile et Clara ne commandent jamais de dessert en même temps.
3. Soit Alma soit Clara commande un dessert (soit les deux).
4. Si Clara commande un dessert alors Alma aussi.

Q1. En utilisant des tables de vérité, déterminer qui prend un dessert et qui n'en prend pas.

Q2. Si l'on enlève n'importe laquelle des quatre informations, peut-on encore déduire quoi que ce soit ?

Exercice 3. *Exercices divers*

Q1. Déterminez si les formules suivantes sont satisfiables. Donnez une valuation satisfaisante lorsque c'est le cas, et une preuve lorsque ça ne l'est pas. Indiquez également lesquelles sont des tautologies.

a. $X \wedge (Y \vee \neg X)$

b. $(X \to \neg Y) \wedge (Z \to Y) \wedge (X \wedge Z)$

c. $(X \wedge Y) \to \neg Z$

d. $(X \to \neg X) \to \neg X$

Q2. Montrez les conséquences et équivalences logiques suivantes :

a. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

b. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \equiv \varphi$

c. $\varphi \models \psi \to \varphi$

d. $\varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \models \psi$

e. $\neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \neg\varphi_2 \vee \varphi_3, \ldots, \neg\varphi_{n-1} \vee \varphi_n, \varphi_1 \models \varphi_n$

Q3. Mettez les fonctions booléennes suivantes sous FNC et sous FND :

a. $f(x, y, z) = ((\bar{x} \times y) + z) \times (\bar{z} + y)$

b. $f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q4. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ et $Q \in \mathcal{Q}$ une variable n'apparaissant pas dans φ ou dans ψ. Montrez que $(\varphi \vee Q) \wedge (\psi \vee \neg Q)$ est satisfiable si et seulement si φ ou ψ est satisfiable.

Q5. Montrez la règle de coupure : pour Γ, Δ des ensembles de formules et φ, ψ des formules, si $\Gamma \models \varphi$ et que $\Delta, \varphi \models \psi$, alors $\Gamma, \Delta \models \psi$.

Exercice 4. *Forme normale disjonctive*

Nous avons vu en cours comment construire une formule sous FND équivalente à une formule φ en utilisant la table de vérité de φ. On s'intéresse dans cet exercice à la formalisation de cette méthode, et à la preuve de sa correction.

Posons $\varphi \in \mathcal{F}$ une formule, dont les variables libres sont $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. On considère le tableau $(T_{i,j})_{i\in[\![0,2^n-1]\!],j\in[\![0,n]\!]}$ de dimensions $2^n \times (n+1)$ suivant :

— Pour $j \leq n-1$ et $i \in [\![0, 2^n-1]\!], T_{i,j} = \delta_{i,j}$

— Pour $i \in [\![0, 2^n-1]\!]$, $T_{i,n} = [\![\varphi]\!]^{\sigma_i}$

Avec :

— $\delta_{i,j} = 1$ si j contient un 1 à la i-ème place de son écriture binaire et 0 sinon

— σ_i est la valuation qui à X_j associe $\delta_{i,j}$.

Autrement dit, on énumère les lignes de la table de vérité en comptant en binaire. De plus, σ_i est la valuation qui correspond aux valeurs choisies sur la i-ème ligne.

Enfin, pour $j \leq n-1$ et $i \in [\![0, 2^n-1]\!]$, on note $l_{i,j}$ le littéral valant X_j si $T_{i,j} = 1$ et $\neg X_j$ sinon.

Q1. Justifier que pour toute valuation σ, il existe $i \in [\![0, 2^n-1]\!]$ tel que σ et σ_i soient égales sur $\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$.

Q2. Montrer que $[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = 1$ pour $i \in [\![0, 2^n-1]\!], j \in [\![0, n-1]\!]$

On pose ensuite pour $i \in [\![0, 2^n-1]\!], C_i = \bigwedge_{j=0}^{n-1} l_{i,j}$.

Q3. Montrer que pour $i \in [\![0, 2^n-1]\!]$, $[\![C_i]\!]^{\sigma_i} = 1$

Q4. Montrer que pour $i, i' \in [\![0, 2^n-1]\!]$ avec $i \neq i'$, $[\![C_i]\!]^{\sigma_{i'}} = 0$

On peut maintenant considérer la formule FND : on pose $I = \{i \in [\![0, 2^n-1]\!] \mid T_{i,n} = 1\}$ et $\psi = \bigvee_{i\in I} C_i$.

Q5. Montrez que $\psi \equiv \varphi$.

Exercice 5. *Quantificateurs et connecteurs*

On pose φ et ψ deux formules. Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Si elles sont vraies, en faire une preuve, et sinon, donner un contre-exemple :

1. $\varphi \vee \psi$ est satisfiable si et seulement si φ ou ψ l'est.
2. $\varphi \wedge \psi$ est satisfiable si et seulement si φ et ψ le sont.
3. $\varphi \vee \psi$ est une tautologie si et seulement si φ ou ψ l'est.
4. $\varphi \wedge \psi$ est une tautologie si et seulement si φ et ψ le sont.
5. $\neg\varphi$ est satisfiable si et seulement si φ ne l'est pas.
6. $\neg\varphi$ est une tautologie si et seulement si φ ne l'est pas.
7. $\neg\varphi$ est une tautologie si et seulement si φ n'est pas satisfiable.

Exercice 6. *Équivalence logique*

Soient $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in \mathcal{F}$ telles que $\varphi \equiv \varphi'$ et $\psi \equiv \psi'$. Montrez qu'alors :

1. $\neg\varphi \equiv \neg\varphi'$
2. $\varphi \wedge \psi \equiv \varphi' \wedge \psi'$
3. $\varphi \vee \psi \equiv \varphi' \vee \psi'$

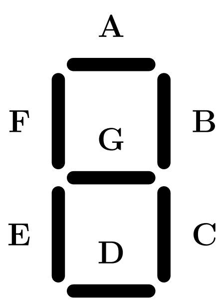
Exercice 7. *Simplication*

Simplifiez la fonction C suivante :

```c
void f(bool x, bool y, bool z, bool t){
  if ((x || !y)  && (x || y)){
    if (z){
      printf("Oui");
    } else {
      printf("Non");
    }
  } else {
    if ((z && !t) || (t && z)){
      printf("Oui");
    } else {
      if (z || x){
        printf("Oui");
      } else {
        printf("Non");
      }
    }
  }
}
```

Exercice 8. *Horloge*

On considère une horloge numérique, et on s'intéresse au fonctionnement d'une des zones d'affichage de chiffres. Cette zone est constituée de 7 segments numérotés de A à G, chacun pouvant être allumé ou non, ce qui permet d'afficher tous les chiffres entre 0 et 9.



On considère les fonctions $f_A, \ldots, f_G$ telles que chaque f_i prend en entrée 4 bits x_3, x_2, x_1, x_0 représentant un nombre $x \in [\![0, 9]\!]$ en binaire, et renvoie un bit indiquant si le segment i doit s'allumer. Si les bits donnés ne représentent pas un nombre entre 0 et 9, le comportement n'est pas spécifié.

Q1. Donner une formule adéquate pour f_A sous FNC.

Q2. Idem avec f_E.

Exercice 9. *Complétude fonctionnelle*

Un ensemble F de connecteurs logiques est dit complet si toute fonction booléenne peut s'écrire en utilisant uniquement des éléments de F. Par exemple, l'ensemble $\{\wedge, \neg, \vee\}$ est complet, car toute fonction booléenne peut se mettre sous une forme normale conjective, qui n'utilise que ces trois opérateurs.

Q1. Montrez que $C_1 = \{\wedge, \neg\}$ et $C_2 = \{\vee, \neg\}$ sont des ensembles complets. Pour cela, donnez deux fonctions inductives $T_1, T_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ qui transforment une formule quelconque en une formule n'utilisant que des opérateurs de C_1 (pour T_1) ou de C_2 (pour T_2).

Q2. Donnez la table de vérité de $\to$ et montrez que $C_3 = \{\to, \neg\}$ et $C_4 = \{\to, \bot\}$ sont complets en exprimant les opérateurs d'un ensemble complet de votre choix en fonction des opérateurs de C_3 et C_4.

On introduit l'opérateur de Sheffer, noté $|$, et souvent appelé "non-et", ou NAND, dont la table de vérité est la suivante :

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Q3. Montrez que $\{|\}$ est complet.

Les ordinateurs sont d'immenses circuits logiques, construits avec des portes logiques. La propriété de complétude du NAND fait qu'il est techniquement possible de construire n'importe quel circuit logique (et donc un ordinateur) exclusivement à base de portes NAND, ce qui évite d'avoir à manufacturer différents types de composants. En pratique, les ordinateurs commerciaux modernes sont constitués de différents composants logiques (dont les portes NAND), mais certains vieux ordinateurs comme les ordinateurs de bord des missions lunaires APOLLO, sont faits exclusivement en portes NOR (non-ou) à trois entrées[1] *!*

Exercice 10. *Algorithme de Quine*

Q1. Utiliser l'algorithme de Quine en prenant les variables dans l'ordre alphabétique, et en testant toujours de remplacer les variables par $\bot$ d'abord et par $\top$ ensuite, pour déterminer une valuation satisfaisant la formule suivante (en traçant l'arbre d'appel) :

$$((Y \wedge W) \vee X) \wedge (X \vee Z \vee W) \wedge (Z \vee W \vee \neg X)$$

Q2. On considère l'algorithme de Quine spécialisé aux formules sous FNC. Dans la version donnée en cours, on considère à chaque étape une variable quelconque, et on teste systématiquement de la remplacer par $\bot$ d'abord et par $\top$ ensuite. Donner une famille de formules $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec φ_n de taille $\Theta(n)$, telle que cette stratégie est très efficace (et donner la complexité dans ce cas précis), puis une famille de formules $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n de taille $\Theta(n)$, telle que cette stratégie est très inefficace.

Q3. En considérant toujours la spécialisation aux formule sous FNC, proposer des stratégies de choix (sur la variable à choisir à chaque étape, et sur la valeur à tester en premier), et discutez de leur efficacité.

Q4. Comment modifier l'algorithme de Quine pour qu'il ne renvoie pas une valuation mais la liste de toutes les valuations satisfaisant la formule d'entrée ?

1. en.wikipedia.org/wiki/Apollo_Guidance_Computer#Logic_hardware

Exercice 11.

Informatique CCP 2008

Les jeux virtuels sur ordinateur font souvent appel à des énigmes logiques régies par le calcul des propositions. Vous participez actuellement à une partie dont les règles sont les suivantes :

Les propositions composant une énigme sont alternativement vraies et fausses, c'est-à-dire que :

— soit les propositions de numéro pair sont vraies et les propositions de numéro impair fausses ;

— soit les propositions de numéro pair sont fausses et les propositions de numéro impair vraies.

Dans un labyrinthe, vous vous retrouvez bloqué dans une salle face à une porte sur laquelle se trouvent deux interrupteurs étiquetés A et B en position ouverte. Sur un seuil figure l'inscription suivante :

Pour ouvrir la porte :

— P1 : Il faut fermer l'interrupteur A.

— P2 : Il faut fermer simultanément les interrupteurs A et B.

— P3 : Il ne faut pas fermer l'interrupteur B.

Attention, en cas d'erreur la salle s'auto-détruira...

Q1. Exprimer P1, P2 et P3 sous la forme de formules des propositions dépendant de variables A et de B, chacune indiquant s'il faut fermer l'interrupteur en question.

Q2. Exprimer la règle du jeu sous la forme d'une formule dépendant des formules P1, P2 et P3

Q3. En simplifiant la formule de la question précédente, déterminer l'action à effectuer pour ouvrir la porte.

Exercice 12.

Professeur Layton et l'Étrange Village - Énigme 71

Le Zouave a encore frappé ! Il a mangé les saucisses du boucher. Voici ce que les quatre suspects (Fig. 1) ont à dire pour leur défense :

A : "C'est B qui a mangé les saucisses !"
B : "D les a toutes mangées !"
C : "Je ne les ai pas mangées !"
D : "B est un sale menteur !"

Seul **un de ces chenapans dit la vérité**, ce qui implique que les autres sont des menteurs. Modélisez la situation avec des variables propositionnelles et des formules adéquates, puis en utilisant les règles de simplification ou les tables de vérité, déterminez **qui est le Zouave**.

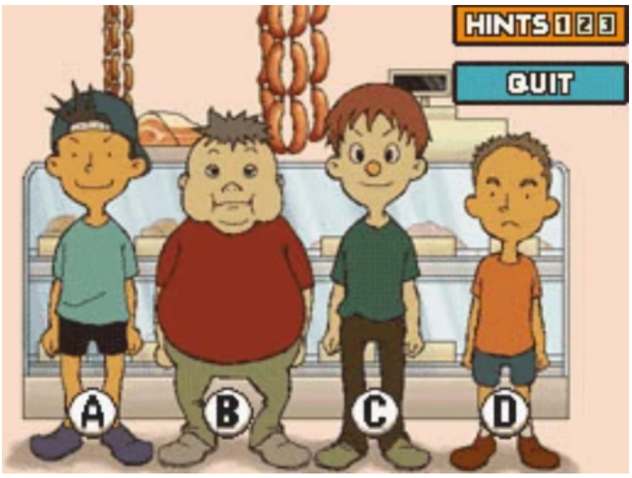


FIGURE 1 – Les quatre suspects de l'affaire

Exercice 13. *Informatique CCINP 2017*

Vous vous retrouvez dans un pays aux coutumes étranges : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans ce pays, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois habitants que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur capitale. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner. Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve la capitale :

X indique : “La capitale se trouve dans la vallée” ;
Z réplique : “Non, elle ne s'y trouve pas” ;
X reprend : “Ou alors dans les collines”.

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve la capitale. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet. Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre la capitale dans la région concernée.

X dit : “Le chemin de gauche conduit à la capitale” ;
Z répond : : “Tu as raison” ;
X complète : “Le chemin de droite y conduit aussi” ;
Y affirme : “Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas” ;
Z indique : “Celui du milieu n'y conduit pas”.

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit à la capitale. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

Q1. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.

Q2. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.

Q3. Simplifier la formule de la question 2 afin de déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre la capitale.

Q4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.

Q5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G, M et D.

Q6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre la capitale.

Q7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ? Si oui, le ou lesquels ?