TD11: Logique
Correction

MP2I Lycée Pierre de Fermat

Exercice 4 : Forme normale disjonctive

Question 1. Soit σ une valuation définie sur $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Les $(\sigma_i)_{i \in [\![0, 2^n-1]\!]}$ couvrent bien les 2^n possibilités, et donc l'une d'entre elles correspond forcément à σ. Explicitement, on peut considérer l'indice i_σ suivant :

$$i_\sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(X_j) 2^j$$

Alors, σ_{i_σ} et σ coïncident sur les X_j. En effet, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\sigma_{i_\sigma}(X_j)$ est le j-ème bit de i_σ, i.e. $\sigma(X_j)$.

Question 2. Soient $i \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$. Faisons une disjonction de cas selon la valeur de $T_{i,j}$.

— Si $T_{i,j} = 0$, alors $l_{i,j} = \neg X_j$ et $\delta_{i,j} = 0$ donc $\sigma_i(X_j) = 0$. Ainsi :

$$[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = \sigma_i(\bar{X}_j) = \bar{0} = 1$$

— Si $T_{i,j} = 1$, alors $l_{i,j} = X_j$ et $\delta_{i,j} = 1$ donc $\sigma_i(X_j) = 1$. Ainsi :

$$[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_i} = \sigma_i(X_j) = 1$$

Finalement, σ_i satisfait toujours le littéral $l_{i,j}$.

Question 3. σ_i satisfait chaque littéral de la clause C_i, donc satisfait C_i.

Question 4. Soient $i, i' \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ avec $i \neq i'$. Alors, leurs écritures binaires sont distinctes, d'où il existe $j \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\delta_{i,j} \neq \delta_{i',j}$. Supposons par exemple que $\delta_{i,j} = 1$ et $\delta_{i',j} = 0$ (l'autre cas est totalement analogue). Alors :

$$[\![l_{i,j}]\!]^{\sigma_{i'}} = \sigma_{i'}(X_j) = 0$$

Ceci implique que $[\![C_i]\!]^{\sigma_{i'}} = 0$.

Question 5. Soit σ une valuation définie sur les X_j. Notons i_0 tel que σ correspond à σ_{i_0} au sens de la question 1.
Il faut montrer que σ satisfait ψ si et seulement si σ satisfait φ.

— ($\Rightarrow$) Supposons que σ satisfait ψ. Alors, il existe $i \in I$ tel que σ satisfait C_i. D'après la question 4, on a donc forcément $i = i_0$, et en particulier $i_0 \in I$. Ainsi, $T_{i_0,n} = 1$, i.e. $[\![\varphi]\!]^{\sigma_{i_0}} = 1$. Donc, $[\![\varphi]\!]^{\sigma_i} = 1$

— ($\Rightarrow$) Supposons maintenant que σ satisfait φ. Alors σ_{i_0} satisfait φ, et donc $T_{i_0,n} = 1$, donc $i \in I$, et comme σ_{i_0} satisfait C_{i_0}, elle satisfait aussi ψ. Donc, σ satisfait ψ.