Compléments 1

Unités et analyse dimensionnelle

I. Dimension d'une grandeur physique

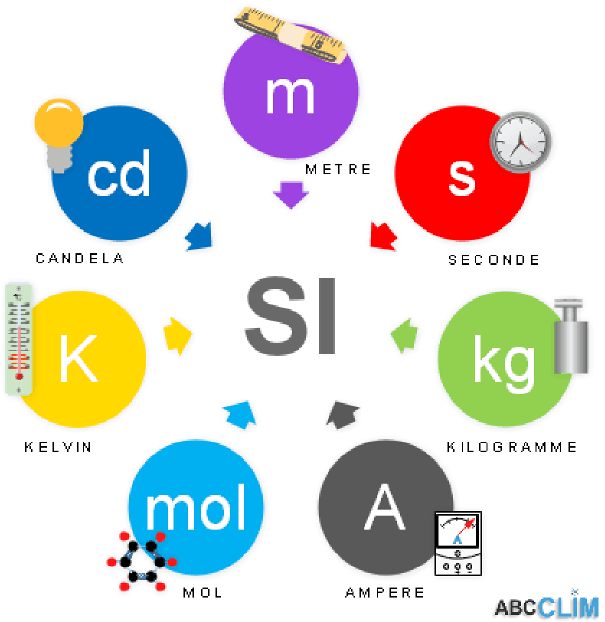
1. Définition
2. Dimensions fondamentales
3. Equation aux dimensions

II. Unités du système international

1. Les unités de base
2. Définition actuelle des sept unités de base
3. Exemples d'unités dérivés du système international
4. Conversions et préfixes des unités du SI
5. Exemples d'unités hors du système international

III. Analyse dimensionnelle et homogénéité

1. Principe
2. Applications
   2.1 Déterminer la dimension d'une grandeur à partir d'une relation
   2.2 Vérifier l'homogénéité d'une relation
   2.3 Déterminer une relation



Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Savoir faire une application numérique et les conversions nécessaires
→ Etablir une équation aux dimensions
→ Déterminer la dimension ou l'unité SI d'une grandeur à partir d'une relation
→ Vérifier l'homogénéité d'une relation
→ Proposer une relation entre grandeurs à l'aide d'une analyse dimensionnelle

La NASA va enfin adopter le système métrique

Par Didier Müller, mercredi 24 janvier 2007

La NASA a finalement accepté de lancer ses futures missions lunaires en utilisant le système métrique décimal. Les propres scientifiques de l'Agence ont enfin eu gain de cause alors qu'ils en faisaient la demande depuis qu'une erreur de calcul due à une confusion entre *miles* et *kilomètres* avait provoqué l'échec de la mission d'une sonde martienne.

L'espace est devenu un business international et la NASA indique que seuls les Etats-Unis, la Birmanie et le Libéria utilisent toujours les miles pour mesurer les distances. L'agence spatiale, après des entretiens avec ses homologues de 15 autres nations, a annoncé la semaine dernière que le futur projet lunaire serait réalisé en utilisant uniquement le système métrique (et les unités SI).

En 1999, la sonde Mars Climat orbiter avait atteint Mars, mais était entrée sur une orbite beaucoup trop basse et s'était écrasée dès son premier passage au-dessus de la face cachée de la planète. La NASA avait plus tard révélé que ses ingénieurs s'étaient embrouillés lors de la simple conversion d'unités métriques en unités impériales (américaines !) d'une information orbitale.

La NASA a commencé à utiliser les mesures métriques pour quelques missions dès 1990, mais pour la plus grande partie d'entre elles, les navettes spatiales ou l'ISS par exemple, les miles, livres et gallons sont toujours de mise.

"Mon unité impériale favorite est le *slug*. La puissance de lancement de la navette est mesurée en slug", ironise Ben Quine, professeur d'ingénierie spatiale de l'université d'York. (Le slug est défini comme étant la masse qui, soumise à une force d'une livre, reçoit une accélération d'un pied par seconde par seconde).

Selon lui, le changement ne sera pas facile pour les américains. "Mais tout le monde doit faire attention avec les unités lors des conversions." Cependant il pense qu'à la longue, les calculs seront facilités. "Le pied est défini d'après la taille du pied d'un des rois d'Angleterre. Je ne me souviens pas lequel. Ce n'est vraiment pas une bonne façon d'envoyer des gens dans l'espace que de se baser sur la taille du pied d'un roi mort."

Source : http://www.techno-science.net/?onglet=news&news=3656

I. Dimension d'une grandeur physique

1. Définition

Une grandeur physique est caractérisée par une **dimension** qui traduit sa nature physique, par exemple : une longueur, un temps, etc… C'est l'approche qualitative, qui répond à la question : **« Qu'est-ce que c'est ?»**

2. Dimensions fondamentales

Le système international d'unités utilise cinq grandeurs fondamentales indépendantes, permettant d'exprimer toutes les grandeurs physiques par produit et quotient : **longueur L, masse M, temps T, courant électrique I, température θ, intensité lumineuse J** et **quantité de matière N.**

3. Equation aux dimensions

Les lois de la physique permettent de relier les dimensions entre elles. En général, la dimension d'une grandeur X, notée entre crochets, s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel, appelé **équation aux dimensions :**

$$[\mathbf{X}] = \mathbf{L^a M^b T^c I^d \theta^f J^g N^h}$$

Exemples : D'un point de vue dimensionnel,

- *Une vitesse v est le rapport entre une distance et un temps,* $[v] = L.T^{-1}$.
- *Une accélération a est le rapport entre une vitesse et un temps :* $[a] = \frac{[v]}{T} = L.T^{-2}$
- *Une force F est le produite d'une masse par une accélération* $[F] = M[a] = M.L.T^{-2}$

Application 1 : Equations aux dimensions

Compléter le tableau suivant :

Dimension	Equivalence en dimensions fondamentales
Fréquence	
Force	
Travail d'une force	
Puissance d'une force	
Pression	

II. Unités du système international

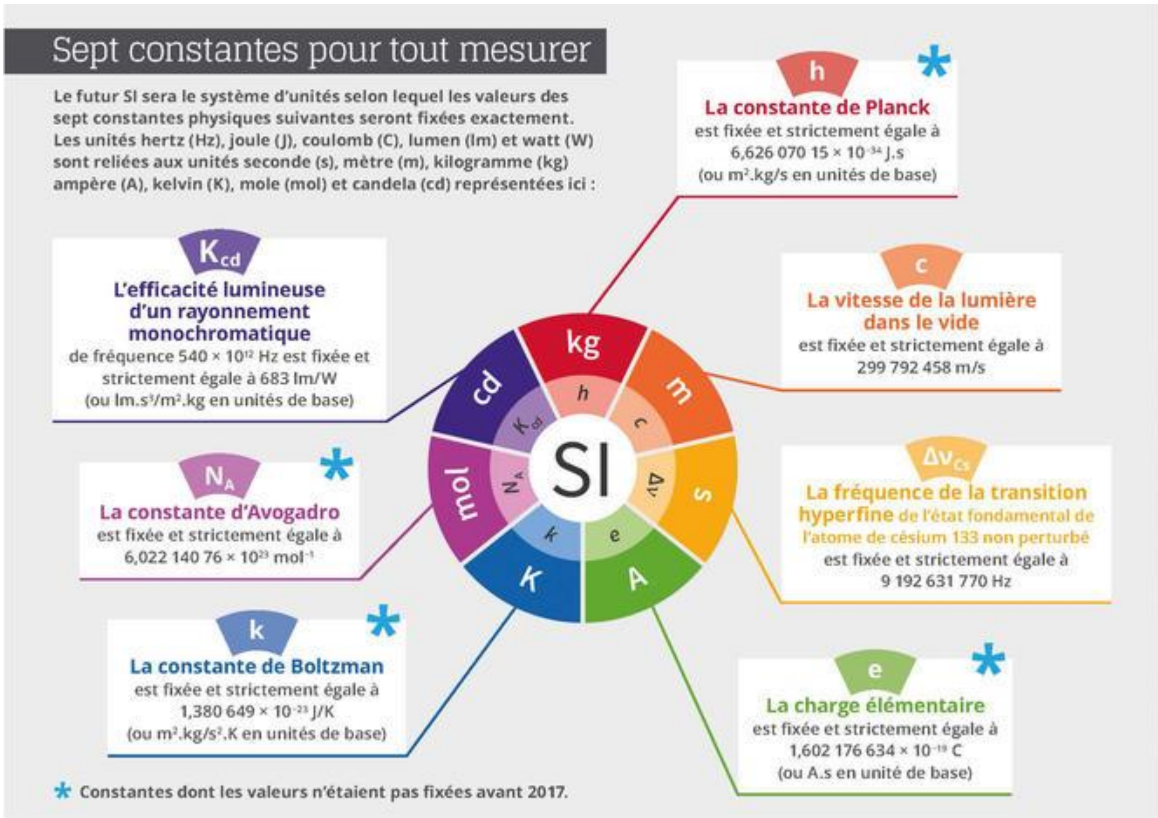
La dimension d'une grandeur peut s'exprimer avec des unités différentes : une longueur peut, par exemple, s'exprimer en mètres, en miles, en années-lumière, etc…

L'unité est indispensable pour renseigner la valeur de la grandeur physique. C'est l'approche quantitative, qui permet de répondre à la question : **« Combien ça vaut ? »**

1. Les unités de base

Il est nécessaire de s'exprimer dans un langage universel, d'où la nécessité de se conformer au système d'unités internationales (SI). Il est fondé sur sept unités de base correspondant aux sept dimensions fondamentales.

Dimension	**Unité SI**
Longueur	Mètre (m)
Masse	Kilogramme (kg)
Temps	Seconde (s)
Intensité électrique	Ampère (A)
Température absolue	Kelvin (K)
Intensité lumineuse	Candela (cd)
Quantité de matière	Mole (mol)



2. Définition actuelle des sept unités de base

LA SECONDE

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{Cs}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s^{-1}.

LE MÈTRE

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, *c*, égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en m s^{-1}, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KILOGRAMME

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, *h*, égale à $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J s, unité égale à kg $m^2 s^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.

L'AMPÈRE

L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, *e*, égale à $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{Cs}$.

LE KELVIN

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, *k*, égale à $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en J K^{-1}, unité égale à kg $m^2 s^{-2} K^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *h*, *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.

LA MOLE

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A, lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1}.

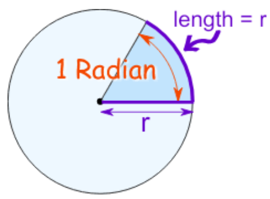
La quantité de matière, symbole *n*, d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules.

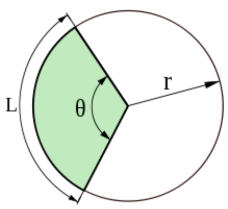
LA CANDELA

La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse, dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd}, égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en lm W^{-1}, unité égale à cd sr W^{-1}, ou cd sr $kg^{-1} m^{-2} s^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de *h*, *c* et $\Delta\nu_{Cs}$.

<u>Remarque</u> :

Un angle est une grandeur sans dimension qui s'exprime en radian ou en degré. Le radian est l'angle plan, qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle. Un cercle complet représente un angle de 2π rad.





Un arc de cercle de rayon r, vu sous un angle θ exprimé en radians a une longueur L = r θ

Les autres unités, ou unités dérivées, sont obtenues en combinant les unités de base d'après les relations algébriques qui lient les grandeurs correspondantes.

3. Exemples d'unités dérivés du système international

Application 2 : Unités dérivés

Compléter le tableau suivant :

Dimension	Unité SI	Dimension	Unité SI
Surface		Force	
Volume		Energie, travail	
Vitesse		Puissance	
Accélération		Pression	
Période		Charge électrique	
Fréquence		Tension électrique	
Masse volumique		Résistance	

4. Conversions et préfixes des unités du SI

Pour les applications numériques et sauf indication contraire, une relation n'est valable numériquement que si l'on utilise les unités du système international.

Préfixe	Symbole	Facteur
péta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
méga	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
déca	da	10^{1}

Préfixe	Symbole	Facteur
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

5. Exemples d'unités hors du système international

Il existe de nombreuses unités en dehors du SI qui présentent un intérêt historique ou qui sont encore utilisées dans un domaine spécialisé (comme le baril de pétrole) ou dans certains pays (comme le pouce, le pied ou le yard). Leur usage est déconseillé dans les travaux scientifiques et techniques modernes.

Noms	Symboles	Valeurs
minute	min	60 s
heure	h	3600 s
jour	j	86 400 s
tour	tr	2π rad
degré	°	(π/180) rad
minute d'angle	′	(π/10 800) rad
seconde d'angle	"	(π/648 000) rad
litre	L	10^{-3} m^3
tonne	t	10^3 kg

Noms	Symboles	Valeurs
unité de masse atomique	u	1,6605402·10^{-27} kg
unité astronomique	ua	149 600 ·10^6 m
<u>mile</u>	mi	1.60934 m
angström	Å	10^{-10} m
are	a	10^2 m^2
hectare	ha	10^4 m^2
bar	bar	10^5 Pa
atmosphère	atm	101325 Pa
électronvolt	eV	1,60217733·10^{-19} J

III. Analyse dimensionnelle et homogénéité

1. Principe

Toute relation entre plusieurs grandeurs doit être homogène, c'est-à-dire que les deux membres d'une égalité doivent nécessairement avoir la même dimension.

On vérifie l'homogénéité d'une relation en faisant une **analyse dimensionnelle.**

QUELQUES REGLE SIMPLES

- **On ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même dimension.**
- **L'argument des fonctions mathématiques comme cos, sin, tan, ln, exp, log… doit être sans dimension, ces fonctions sont elles-mêmes sans dimension.**
- **La dimension du produit (quotient) de deux grandeurs est le produit (quotient) des dimensions de chacune des grandeurs**
- **Les 2 membres d'une égalité, d'une somme ou d'une différence sont de même nature** (scalaire ou vectorielle).

<u>Remarque</u> :

Une relation non homogène est toujours fausse mais une relation homogène n'est pas nécessairement juste (erreur de signe, de coefficient numérique…).

2. Applications

2.1 Déterminer la dimension d'une grandeur à partir d'une relation

Pour cela, on isole la grandeur étudiée et on remplace les grandeurs connues par leur dimension ou unité SI.

Application 3 : Dimension d'un coefficient de frottement

La norme de la force de frottement qu'exerce un fluide sur un solide peut dans certaines conditions s'écrire $F = kv$, où v est la vitesse relative du solide dans le fluide. Quelle est la dimension de k ?

2.2 Vérifier l'homogénéité d'une relation

Pour chaque membre de l'égalité, on remplace chaque grandeur par sa dimension exprimée en dimensions fondamentales et on vérifie que l'on obtient la même chose.

Application 4 : Vitesse de propagation d'une onde le long d'une corde

La vitesse de propagation c d'une onde se propageant le long d'une corde tendue a pour expression $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec μ la masse linéique de la corde et T la tension de la corde. Vérifier que cette relation est homogène.

Application 5 : Juste ou faux ?

Un élève écrit $a = k\frac{v^2}{t}$ où a est une accélération, k une grandeur sans dimension, t un temps et v une vitesse. La relation est-elle homogène ?

2.3 Déterminer une relation

Lorsque l'on a identifié les grandeurs physiques pertinentes d'un problème, on peut trouver une formule liant ces grandeurs à un facteur près par simple analyse dimensionnelle.

On remplace dans l'égalité chaque grandeur par sa dimension exprimée en dimensions fondamentales et on pose un système d'équations à plusieurs inconnues où celles-ci sont les puissances affectées aux grandeurs.

Application 6 : Période du pendule simple

On observe que la période T d'un pendule placé dans le vide dépend uniquement de la longueur l du fil et de g, l'accélération de pesanteur.

Proposer une relation de la forme : $T = k\, l^{\alpha} g^{\beta}$ avec k, α et β des nombres sans dimension.

Entraînement personnel

Exercice 1 : Le plus rapide (⋆)

Un guépard court à 28m/s et un automobiliste conduit une voiture à 110 km/h sur l'autoroute. Lequel des deux est le plus rapide ?

Exercice 2 : Prendre le volant (⋆)

Le taux maximal d'alcool dans le sang pour pouvoir conduire est de 0,5 g d'alcool pour 1 L de sang. A-t-on le droit de conduire avec 2 mg d'alcool dans 1000 mm³ de sang ?

Exercice 3 : Résistance d'un fil de cuivre (⋆)

La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \frac{l}{\gamma S}$, où $\gamma = 59$ MS/m est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1{,}0 \cdot 10^3$ cm est la longueur du fil et où $S = 3{,}1$ mm² est sa section. L'unité des résistances est l'ohm, notée Ω. L'unité notée S est le siemens ; on a $1\ \Omega = 1\ S^{-1}$.

Calculer la valeur de la résistance du fil.

Exercice 4 : Equivalence entre unités (⋆)

1) Donner l'équivalent du newton en unités SI.
2) Donner l'équivalent du Joule en unités SI.
3) On considère une masse m de corps de capacité thermique massique c. Pour élever sa température de ΔT, il faut lui fournir une énergie thermique $Q = mc\,\Delta T$. Quelle est l'unité de la capacité thermique massique c ?

Exercice 5 : Energie d'une particule relativiste (⋆)

La relation $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ lie l'énergie E d'une particule relativiste à sa masse m, sa quantité de mouvement p et une constante c. Quelles sont les dimensions des grandeurs c et p ?

Exercice 6 : Vitesse d'un électron (⋆⋆)

La vitesse d'un électron soumis à une différence de potentiel U est $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ où e est la charge électrique élémentaire et m la masse de l'électron. Vérifier que la relation est homogène.

Exercice 7 : Troisième loi de Képler (⋆⋆)

L'interaction gravitationnelle se manifeste par l'apparition d'une force F entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance d. L'expression de cette force est :

$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$, G étant la constante de gravitation universelle.

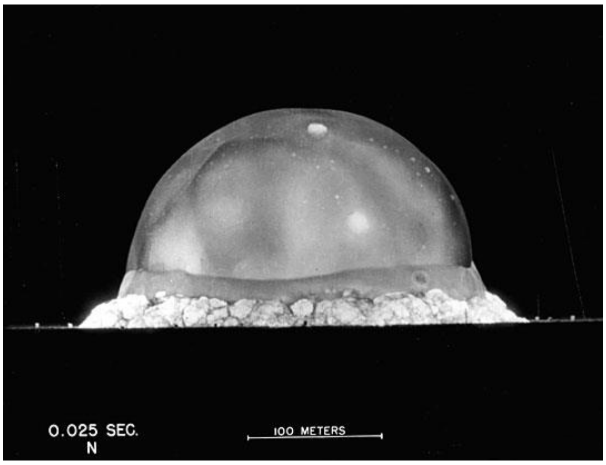
1) Quelle est la dimension de G ?

2) On considère une planète de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour du Soleil de masse M. Soit T la période de révolution de la planète. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3ème loi de Kepler de la forme : $\frac{T^\alpha}{R^\beta} = \frac{k}{G^\gamma M^\delta}$, où k est une constante.
3) Mars possède une période de révolution $T_M = 686,9$ j. En déduire sa distance au Soleil. On rappelle que la Terre distante de 150 millions de kilomètres du Soleil effectue une révolution en 365,25 j.

Exercice 8 : Trinity (★★)

L'essai Trinity, la première explosion d'une bombe atomique en juillet 1945, a produit une déflagration aveuglante et un nuage en forme de champignon qui a brusquement envahi le ciel.

La légende voudrait que l'analyse dimensionnelle ait permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion, tandis que cette information était classée top secret.



Le physicien Taylor suppose à priori que le processus d'expansion de la sphère de gaz dépend au minimum des paramètres suivants : le temps t ; l'énergie E dégagée par l'explosion ; la masse volumique de l'air ρ. Il lui a suffi ensuite d'observer la dilatation du champignon atomique sur un film d'explosion, imprudemment rendu public par les militaires américains.

1) Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de l'énergie dégagée E en fonction de t, ρ et du rayon r de la sphère de gaz.
2) Calculer, au facteur k près et à l'aide de la photo ci-dessous, l'énergie dégagée par l'explosion (on prendra $\rho = 1,3$ kg.m^{-3}).

Exercice 9 : Cuisson du poulet du dimanche (★★★)

Nous allons voir qu'une petite analyse dimensionnelle peut remplacer un livre de cuisine. On souhaite déterminer le temps de cuisson d'un poulet de 1.5 kg.

On comprend bien que le temps de cuisson dépend de la masse m du poulet, de son volume V et de la conductivité thermique de la viande puisque pour que l'intérieur cuise, il faut que la chaleur pénètre la viande. Un autre paramètre s'impose : la capacité thermique massique. On se placera à température constante.

1) Sachant que la capacite thermique massique c s'exprime en J.kg^{-1}.K^{-1} et la conductivité thermique λ en W.m^{-1}.K^{-1}, déterminer, à partir d'une analyse dimensionnelle, une relation entre les différents paramètres. On choisira d'exprimer le temps de cuisson.
2) On lit souvent qu'à 180 °C, il faut compter 25 min par 500 g. D'après le modèle précédent, quelle durée faut-il pour cuire un poulet de 1.5 kg ? Commenter.