Compléments 2

Mesures et incertitudes

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
→ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).
→ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
→ Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
→ Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
→ Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
→ Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
→ Comparer deux valeurs dont les incertitudes-type sont connues à l'aide de leur écart normalisé.
→ Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation

Il n'existe pas de mesure « parfaite » d'une grandeur expérimentale. Si la même mesure est réalisée n fois dans ce qu'on croît être exactement les mêmes conditions, les résultats obtenus pourront être différents : il y a **variabilité** de la mesure expérimentale. Cette variabilité est liée à de nombreux facteurs tel que l'instrument de mesure utilisé, le choix de la méthode de mesure, les paramètres extérieurs (variation de température, échauffement des composants électroniques, ...)

I. Précision d'une mesure et chiffres significatifs

Toute mesure effectuée à l'aide d'un appareil donne un résultat qui n'est jamais rigoureusement la valeur vraie de la grandeur à mesurer. La valeur numérique sous-entend la précision par le nombre de chiffres significatifs indiqués. Les chiffres donnés sont ceux qui ont du sens, ce qui signifie que le chiffre suivant n'aurait pas de sens dans le contexte de la mesure effectuée.

Les chiffres significatifs sont tous les chiffres à partir du premier chiffre différent de zéro.

Application 1 : Chiffres significatifs

Combien de chiffres significatifs possèdent les valeurs suivantes ?

102.300	102.3	0102.30

Lors d'un calcul, les données sont parfois fournies avec des nombres de chiffres significatifs différents :

- → **Après une addition ou une soustraction, on conserve autant de décimales que la donnée qui en a le moins.**
- → **Après une multiplication ou une division, le résultat doit contenir le même nombre de chiffres significatifs que la donnée qui en contient le moins. On utilise pour cela l'écriture scientifique.**
- → **La valeur d'une fonction a le même nombre de chiffres significatifs que son argument.**

Application 2 : Opérations et chiffres significatifs

1) Calculer le temps de parcours d'un athlète $\Delta t = t_2 - t_1$. On mesure $t_1 = 55{,}2$ s et $t_2 = 143$ s.
2) Calculer la vitesse de chute d'une bille dans l'eau : $v = \frac{d}{t}$, avec $d = 1{,}00$ m et $t = 2{,}6$ s.

☞ **En général, en CPGE, les valeurs numériques seront données avec un même nombre de chiffres significatifs, généralement 2 ou 3.**

☞ **Pour limiter le cumul d'erreurs sur les arrondis lors de calculs complexes, on évitera tout calcul intermédiaire.**

Cependant, il faut parfois déroger à ces règles pour ne pas être trop imprécis, notamment lorsqu'une donnée ne possède qu'un seul chiffre significatif.

II. Erreur et incertitude

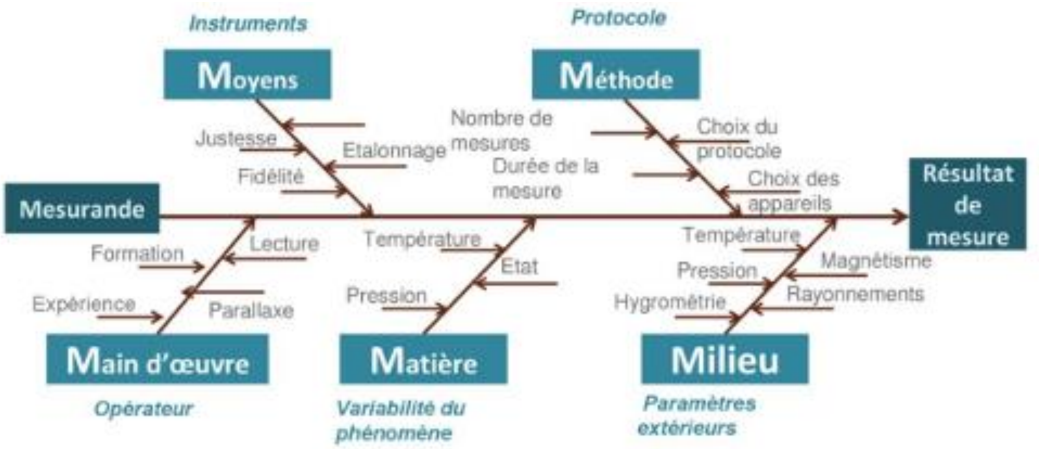
1. Erreur

On appelle erreur la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie. Les erreurs sont de deux sortes :

- Les **erreurs aléatoires** qui interviennent à chaque mesure et dont le sens par rapport à la valeur vraie est imprévisible. Ce sont ces erreurs qui sont traitées dans les calculs d'incertitudes par une étude statistique ;

- Les **erreurs systématiques** qui font apparaître un écart toujours dans le même sens par rapport à la valeur vraie. Les erreurs systématiques ont des origines diverses : défaut d'appareil, erreur d'étalonnage, procédure erronée… Elles doivent être identifiées et corrigées.

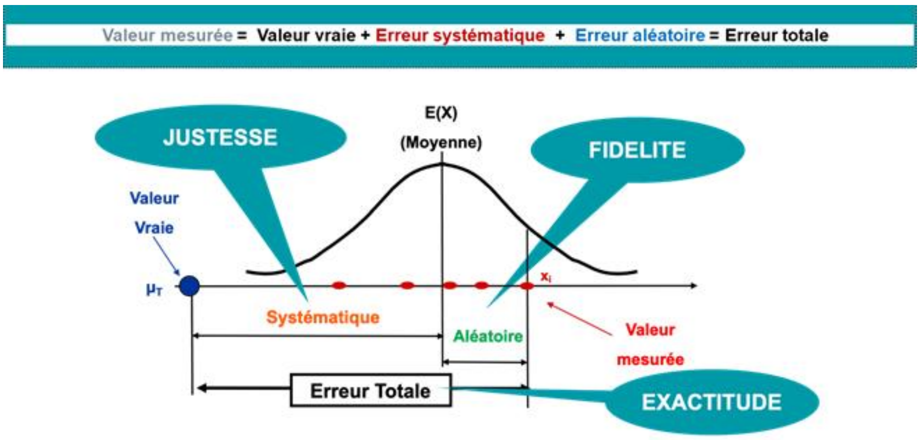
Le schéma ci-dessous résume les sources d'erreurs :



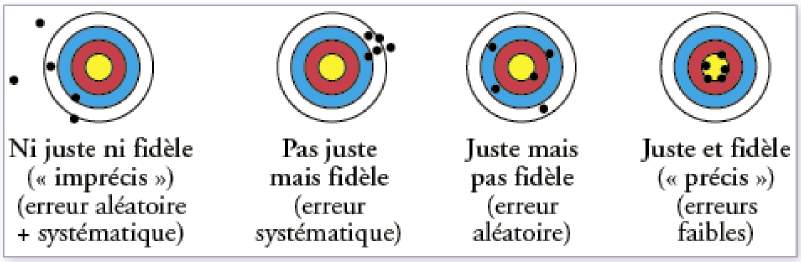
→ *Lorsqu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule en opérant avec un chronomètre manuel, on constate qu'en répétant les mesures on trouve des résultats légèrement différents, dus surtout aux retards de déclenchement.* Il s'agit d'**erreur aléatoire**.

→ *Supposons maintenant qu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule avec un chronomètre faussé qui indique toujours des temps trop faibles.* Il s'agit d'une **erreur systématique**.

Lors d'une mesure, l'erreur aléatoire peut prendre, au hasard, n'importe quelle valeur sur un certain intervalle. Par contre, l'erreur systématique peut être considérée comme constante.



On représente classiquement les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec un tir sur cible, le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :



2. Ecriture du résultat d'une mesure

Afin d'estimer la variabilité du résultat de la mesure, on lui associe une incertitude.

L'indication complète du résultat d'une mesure d'une grandeur physique X comporte alors : x, la valeur considérée comme étant la meilleure estimation et l'incertitude permettant de définir l'intervalle à l'intérieur duquel la vraie valeur a de fortes chances de se trouver :

$$\mathbf{X = (x \pm u(X))\ unité}$$

☞ **u(X) est écrite avec 2 chiffres significatifs maximum (arrondi par excès), x et u(X) ont la même unité et le même nombre de décimales.**

Exemple : I = 50 ± 2 mA, indique que la valeur réelle du courant se situe entre 48 et 52 mA.

Remarques :

- L'incertitude étant associée à la notion de probabilité, si après avoir déterminé l'intervalle, on refait une nouvelle mesure, on ne peut pas exclure qu'elle soit en dehors de l'intervalle.
- Le rapport de ces grandeurs, $\frac{\mathbf{u(X)}}{\mathbf{x}}$ est appelé **incertitude relative,** elle s'exprime généralement en pourcentage.
- Dans un calcul d'incertitude, on ne tiendra pas compte des erreurs systématiques.

3. Evaluation de l'incertitude

On quantifie la dispersion des résultats de mesure par une grandeur mathématique, appelée **écart-type**. Plus l'écart-type est petit plus les résultats de mesure sont proches les uns des autres et resserrés autour de la valeur moyenne. Plus l'écart-type est grand plus les résultats de mesure sont éloignés les uns des autres et dispersés autour de la valeur moyenne.

Une incertitude évaluée par un calcul d'écart-type est appelée incertitude type.

Il existe deux types d'évaluation :

✓ **L'incertitude-type de type A** : cas de plusieurs mesures effectuées plusieurs fois dans les mêmes conditions, son évaluation utilise une méthode statistique.

✓ **L'incertitude-type de type B** : cas d'une mesure unique ou d'une absence de variabilité, on l'évalue à partir des données du constructeur de l'appareil de mesure et d'hypothèses sur la qualité de la lecture réalisée sur l'appareil.

3.1 Evaluer une incertitude-type de type A ou incertitude de répétabilité

Soit n mesures effectuées dans les mêmes conditions expérimentales (même opérateur, même matériel, …) donnant des valeurs mesurées x_k.

En l'absence d'erreur systématique, on considère que la meilleure estimation de la valeur vraie de la grandeur cherchée est la **moyenne des valeurs mesurées :**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

L'écart-type des valeurs mesurées, dit **écart-type expérimental**, est : $\sigma_{n-1}(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$

L'écart-type de la moyenne est alors $\boldsymbol{\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{n}}}$.

C'est cette incertitude-type qu'il faudra utiliser. Elle caractérise la variabilité de la moyenne. En effet, si l'on répétait plusieurs fois la même série de mesures dans les mêmes conditions, on obtiendrait à priori des moyennes différentes, mais qui seraient moins dispersées que les valeurs d'une seule série de mesure.

Evaluation d'une incertitude de type A

La valeur moyenne des mesures est choisie comme la meilleure estimation : X = $\boldsymbol{\bar{x}}$

Calcul de la valeur moyenne : $\boldsymbol{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$

```
np.mean([valeurs])
```

Calcul de l'écart-type expérimental des mesures : $\sigma_{n-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$

```
np.std([valeurs],ddof=1)
```

L'incertitude-type de type A est :

$$\boldsymbol{u_A(X) = \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{n}}}$$

Application 3 : Mesure d'un indice de réfraction

Des élèves d'une classe de seconde mettent en place une expérience de réfraction dans le but de déterminer l'indice de réfraction de l'eau n_{eau}. Après plusieurs mesures d'angles d'incidence et de réfraction d'un faisceau laser passant de l'air dans l'eau, les binômes de la classe obtiennent les résultats suivants :

Binôme	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de n_{eau}	1,28	1,41	1,33	1,33	1,24	1,29	1,31	1,32	1,38

1) À l'aide des formules données précédemment, évaluer la valeur moyenne de l'indice de réfraction de l'eau.
2) Évaluer l'incertitude de répétabilité sur le résultat.
3) Ecrire correctement le résultat.

3.2 Evaluer une incertitude-type de type B liée à l'instrument de mesure

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. C'est le cas si l'on fait une seule mesure ou si la répétition de la mesure conduit toujours au même résultat (*exemple : mesure de la taille d'un objet avec une règle graduée*). L'absence de variabilité n'implique pas une absence d'incertitude : la précision de la mesure est insuffisante pour observer une variabilité.

Lors d'une mesure expérimentale sur une grandeur X, il faut estimer l'intervalle dans lequel on est raisonnablement certain que X est compris, [x−Δ, x+Δ], x est le centre de cet intervalle et Δ sa demi largeur.

Dans le cas où l'on suppose que la valeur mesurée suit une distribution de probabilité uniforme sur l'intervalle choisi, on peut montrer que l'incertitude-type est donnée par :

$$u_B(X) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

avec Δ la demi-largeur de l'intervalle pouvant contenir la grandeur à mesurer.

- La précision Δ des **instruments de mesure gradués** est égale à **une demi-graduation**.

- La précision d'un **multimètre** est donnée par le constructeur de l'appareil sous la forme :
  ***p* % de la valeur lue + *n* digit.** 1 digit (dgt), ou 1 Unité de Représentation (UR) correspond à l'unité du dernier chiffre affiché à droite de l'écran, c'est-à-dire la plus petite valeur qui puisse être affichée sur le calibre choisi.

- En chimie, la précision est donnée par la **tolérance** inscrite sur la **verrerie** (*exemple : fiole jaugée de 500mL ±0,25mL donc Δ = 0,25 mL*).

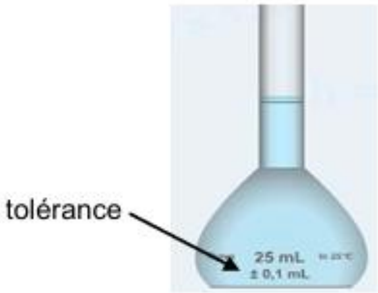
- La précision d'une méthode de mesure est parfois à déterminer **expérimentalement** (*exemple : en optique pour repérer la position d'image d'une image*). Dans ce cas : $\Delta = \frac{x_{max}-x_{min}}{2}$

Cas les plus courants	
Appareil analogique (appareil à cadran, règle, ...)	$u_{B,lecture}(X) = \frac{1\ \text{graduation}}{\sqrt{12}}$ $u_{B,double\ lecture}(X) = \frac{1\ \text{graduation}}{\sqrt{6}}$ *(Exemple de double lecture : lors de la lecture sur une règle graduée il y a 2 incertitudes une, sur le positionnement du « zéro » et l'autre sur la lecture de la graduation, pesée avec tare)*
Appareil numérique (voltmètre, ampèremètre,...)	$u_B(X) = \frac{\text{précision}}{\sqrt{3}} = \frac{p\% \times \text{lecture} + n \times \text{digit}}{\sqrt{3}}$
Autre instrument (verrerie,...) ($\pm t$) : précision ou tolérance du constructeur	$u_B(X) = \frac{t}{\sqrt{3}}$

<u>Application 4</u> : Ecriture d'une mesure

Dans chacun des cas ci-dessous, exprimer correctement le résultat de la mesure.

Thermomètre gradué en °C



Précision = 3% valeur lue+1 digit

Règle

3.3 Incertitude-type composée : propagation des incertitudes

L'incertitude-type composée est l'incertitude associée à une grandeur que l'on a calculée à partir de grandeurs mesurées. On connait les grandeurs expérimentales x, y, … et les incertitudes associées. Quelle est l'incertitude-type sur la grandeur Q = f(X, Y, …) ?

A connaître :

- **Combinaison linéaire** $Q = aX+bY$ **(*a*, *b* *constantes*) :** $u(Q) = \sqrt{(au(X))^2 + (bu(Y))^2}$
- **Produit ou quotient** $Q = k\,X^aY^b$ **(*k*, *a*, *b* constantes) :** $u(Q) = |Q|\sqrt{\left(a\frac{u(X)}{x}\right)^2 + \left(b\frac{u(Y)}{y}\right)^2}$

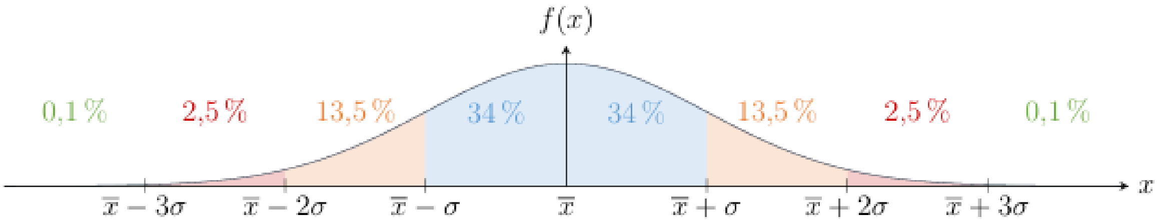
Les incertitudes-types s'ajoutent selon la loi : $u(X) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots}$

On comprend alors l'incertitude de double lecture : : $u(X) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2\left(\frac{1\,graduation}{\sqrt{12}}\right)^2} = \frac{1\,graduation}{\sqrt{6}}$

☞ **Pour des expressions complexes, on utilisera la méthode numérique de Monte Carlo (ON 2).**

4. Intervalle de confiance

Dans le cas où la distribution de probabilité qui décrit le résultat de mesure est une loi normale (Fig. ci-dessous), on estime que la valeur vraie de la grandeur physique X est comprise dans l'intervalle [x − σ(x), x + σ(x)] avec une probabilité et donc un niveau de confiance de 68%, dans l'intervalle [x − 2σ(x), x + 2σ(x)] avec une probabilité et donc un niveau de confiance de 95%.



Loi normale. Les pourcentages indiquent le niveau de confiance associé à chaque intervalle.

5. Validation d'un résultat expérimental

Comparaison d'un résultat à une valeur de référence

Si l'on souhaite comparer le résultat d'un processus de mesure : *X =(x±u(x)) unité*, à une valeur de référence *X =* x_{ref} *unité*, on utilise plutôt le **z-score** défini comme :

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}$$

Les deux valeurs sont compatibles si z ≤ 2.

Comparaison de deux résultats de mesure

Supposons que l'on mesure la même grandeur X avec deux protocoles distincts. On dispose alors de deux valeurs qu'il faut comparer : X =(x_1±u(x_1))unité et X = (x_2±u(x_2)) unité. On utilise **l'écart normalisé** E_n, défini comme :

$$E_n = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}}$$

Les deux mesures sont compatibles si E_n ≤ 2.

III. Régression linéaire

1. Principe

Supposons que l'on cherche à vérifier un modèle $y = ax + b$ et que l'on ait, après expérience, un ensemble de valeurs expérimentales {x_i} et {y_i} qui possèdent chacun une certaine variabilité.

La régression linéaire (ou plutôt affine) est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients a et b tels que ax_i+b soient les plus proches en moyenne des points de mesures y_i.

Une régression linéaire permet de trouver la « meilleure droite » modélisant le mieux le comportement de ces points.

2. Validation du modèle

2.1 Un premier contrôle visuel

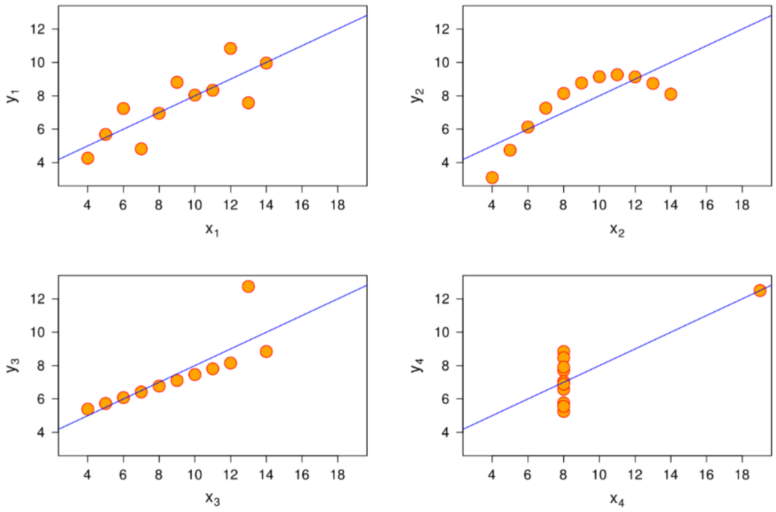
On trace la droite de régression linéaire $y = ax + b$ sur le graphe.

Les données expérimentales sont en accord avec le modèle si les points de mesure apparaissent quasi alignés et que la droite de régression passe à proximité de ces points.

2.2 Critique du coefficient de corrélation

Pour quantifier l'écart entre les points expérimentaux et la droite de régression, les calculatrices et logiciels renvoient généralement la valeur du coefficient de corrélation linéaire R, ou parfois son carré R^2, le coefficient de détermination linéaire.
Le coefficient R est un nombre compris entre −1 et 1, du même signe que la pente a, qui mesure l'existence d'un lien linéaire entre x et y, ainsi plus R^2 est proche de 1, mieux les points sont alignés. La valeur $R^2 = 1$ signifie en particulier que tous les points expérimentaux sont exactement sur la droite proposée. Une question légitime est de savoir si le coefficient de corrélation permet ou non de conclure à la validité du modèle. L'exemple suivant permet de répondre par la négative.

Le quartet d'Anscombe est constitué de quatre ensembles de données ayant les mêmes propriétés statistiques (moyenne, écart-type, droite régression linéaire, coefficient de corrélation linéaire) mais qui sont en réalité très différents, ce qui se voit facilement lorsqu'on les représente sous forme de graphiques. Ils ont été construits en 1973 par le statisticien Francis Anscombe dans le but de démontrer l'importance de tracer des graphiques avant d'analyser des données.



On observe notamment, dans le troisième ensemble, une modélisation correcte avec une donnée aberrante qui influe sur le coefficient de corrélation global, égal à 0,81. Le quatrième ensemble démontre par contre qu'une seule donnée aberrante suffit pour obtenir un coefficient de corrélation élevé, alors même que, hormis cette 11e donnée, il n'existe pas de corrélation entre les deux variables puisque la variable x est constante.

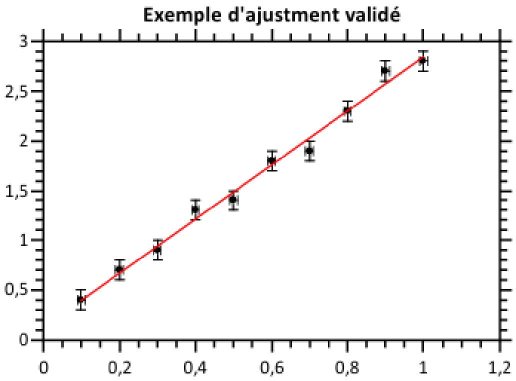
Conclusion : La façon la plus fiable pour conclure quant à la validité d'une régression linéaire est une représentation graphique. Le tracé doit montrer qu'une loi affine est un bon modèle.
Le calcul du coefficient de corrélation se fait après et vient renforcer l'argumentation d'une relation affine entre deux grandeurs x et y. Il ne peut pas se substituer au tracé de cette courbe.

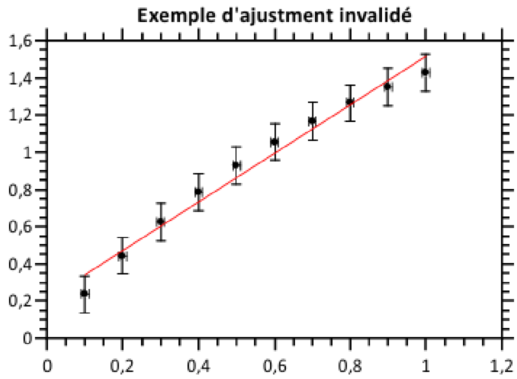
2.3 Tracé des barres d'incertitudes

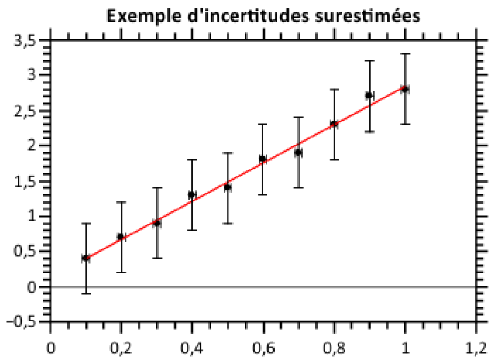
L'ajustement affine des données expérimentales est jugé cohérent si :

- **Les points de mesure semblent répartis aléatoirement de part et d'autre du modèle.**
- **L'écart moyen entre mesure et droite modèle est de l'ordre de grandeur des incertitudes.**

Exemple :







<u>Sur la figure en haut à gauche</u>, l'écart entre les points expérimentaux et la droite est du même ordre de grandeur que les incertitudes. On peut valider le modèle.

<u>Sur la figure en haut à droite</u>, là aussi l'écart entre les points expérimentaux et la droite est du même ordre de grandeur que les incertitudes mais les points de mesure ne sont pas du tout répartis aléatoirement de part et d'autre du modèle. On ne peut pas valider le modèle.

<u>Sur la dernière figure</u>, les incertitudes sont grandes par rapport aux écarts des points à la droite. Le modèle n'est pas a priori rejeté mais les imprécisions sont grandes : de nombreuses droites peuvent intercepter l'ensemble des barres d'erreur et des lois non linéaires pourraient convenir. Les incertitudes sont peut-être surestimées.

☞ **L'évaluation de incertitudes sur a et b peut être, là aussi, faite par la méthode numérique de Monte Carlo (voir ON 3).**

Entraînement personnel

Exercice 1 : Mesurer avec un voltmètre numérique (★)

En exploitant la notice ci-dessus :

Plage VC130/150	Précision	Résolution
200 mV	±(0,5% + 8)	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	±(0,8% + 8)	1 V

Extrait de la notice du multimètre Voltcraft VC 130.

1) Indiquer quelle est la précision lorsque l'appareil affiche 10,00 V dans le calibre 20 V.
2) En déduire la valeur de l'incertitude-type associée.
3) Expliquer pourquoi il est préférable de choisir le calibre 20 V plutôt que le calibre 200 V.

Exercice 2 : Position d'un viseur (★)

On relève la position x d'un viseur sur un banc optique. Le banc est gradué au millimètre, et lors du pointé optique, on constate que l'image observée à travers le viseur reste nette sur un intervalle de largeur 4 mm. Evaluer l'incertitude-type sur la position x du viseur.

Exercice 3 : Mesure d'une puissance (★★)

On cherche à déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans un résistor de résistance R, traversé par un courant d'intensité I. Grâce à un ampèremètre et un ohmmètre, on obtient les résultats suivants : $R = 15{,}7 \pm 1.0\ \Omega$ et $I = 0.274 \pm 0.002$ A.

1) Quel résultat obtient-on pour la puissance dissipée par effet Joule $P = R\,I^2$?
2) Evaluer l'incertitude-type.
3) Quel terme aurions-nous pu négliger pour l'évaluation de l'incertitude ?

Exercice 4 : Mesure de la masse volumique de l'eau liquide (★★)

Pour mesurer expérimentalement la masse volumique de l'eau, on réalise 9 fois de suite le protocole suivant :

- On prélève 100 mL d'eau distillée dans une fiole jaugée dont l'intervalle de tolérance est de ± 0,1 mL.
- On mesure la masse correspondante de l'eau ainsi prélevée, la résolution de la balance étant de 0.01 g.

On calcule la moyenne des masses 99,4856 g et l'écart-type 0,5824 g.

1) Déterminer la masse volumique de l'eau et son incertitude-type.
2) La valeur obtenue est-elle compatible avec la valeur de référence de 1,00 g cm^{-3} ?