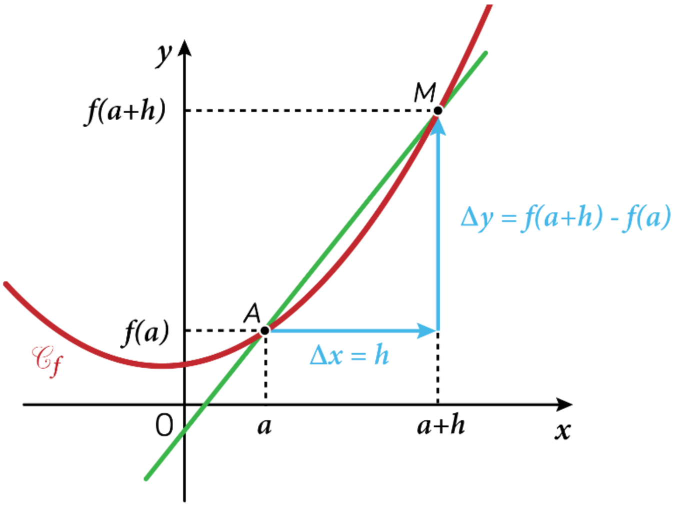
OM 3 – Dérivée et différentielle

I. Fonction d'une seule variable

Soit une fonction $y : x \rightarrow f(x)$

Pour une variation Δx de la variable x au voisinage de a, la fonction f varie d'une quantité Δy telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \Delta y$$



Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente la pente de la droite joignant les points $A(a\,;\,f(a))$ et $M(a+h\,;\,f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0, le point M tend vers le point A et la droite reliant A à M tend vers la tangente à la courbe en a. Dans ces conditions, on définit la dérivée de la fonction $f(x)$ en a, notée $f'(a)$, par :

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Le nombre $f'(a)$ représente **la pente de la tangente** en a.

En physique, on interprète la dérivée comme un rapport entre deux variations infinitésimales (« très petites ») **: dy et dx, appelées différentielles respectivement de y et de x.** On utilise la notation de Leibniz **:**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{dy}{dx}}.$$

Lorsque x varie de façon infinitésimale d'une quantité dx, $f(x)$ varie de façon infinitésimale d'une quantité df telle que :

$$\boldsymbol{df = f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx}.$$

II. Fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction de plusieurs variables : $f(x_1, ..., x_n)$.

Pour exprimer la variation infinitésimale df, on s'intéresse à l'influence de chacune des variables sur f lorsque les autres sont gardées constantes.

La dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport à l'une de ces variables, les autres étant donc gardées constantes.

La dérivée partielle par rapport à la variable x_1 est notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2,...x_n}$, où ∂est appelé « d rond », symbole de la dérivation partielle et où apparaissent en indice les variables maintenues constantes.

Si f est une fonction de $x_1, ..., x_n$ et $dx_1, ..., dx_n$ les différentielles de $x_1, ..., x_n$ respectivement, alors la différentielle de f est :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j\neq i}} dx_i$$

III. Notations et interprétations pour la physique

1. Variations

✓ **Notation dx :**

La différentielle dx représente en physique une toute petite variation (dite infinitésimale ou élémentaire) de la grandeur x.

Exemples : la durée dt, le déplacement dx, la vitesse instantanée d'un point mobile sur un axe (Ox) est $v = \frac{dx}{dt}$

✓ **Notation Δx :**

Elle représente la variation de la grandeur x, cette variation étant quelconque (pas nécessairement petite).

Exemples : distance entre 2 points Δx, variation d'énergie entre deux positions, durée Δt.

Passage de l'une à l'autre :

Sommer les variations élémentaires dx d'une grandeur x entre deux états A et B revient à calculer la variation totale Δx entre A et B : $\boldsymbol{\Delta x = x_B - x_A = \int_A^B dx}$.

2. Quantité élémentaire

En physique, on rencontre des quantités élémentaires à ne pas confondre avec les variations infinitésimales.

✓ **Notation $\boldsymbol{\delta x}$:**

Elle représente une quantité infinitésimale ou quantité élémentaire (« très petite »).

Sommer les quantités élémentaires δx d'une grandeur x entre deux états A et B revient à calculer la grandeur x entre A et B : $\boldsymbol{x = \int_A^B \delta x}$

Exemple : travail élémentaire d'une force δW, travail entre A et B : $W = \int_A^B \delta W$

Une quantité élémentaire peut dans certains cas être interprétée comme une variation élémentaire.

Mais ce n'est pas toujours le cas !!!

Exemple : une durée élémentaire δt peut également être décrite comme une variation élémentaire de la date t.

Contre exemple : En mécanique et en thermodynamique, on étudie les échanges d'énergie. Ces échanges sont de deux formes : par chaleur ou par travail. L'énergie est une quantité définie pour un état du système et qui varie lors d'une transformation alors que chaleur et travail sont des grandeurs qui ne sont définies que lors d'une transformation. On peut parler de variation d'énergie mais surtout pas de variation de travail ou de chaleur : les notations dW et dQ sont à proscrire !!!! Chaleur et travail sont déjà en soit des variations d'énergie.