OM 4 – Dérivées et primitives usuelles

I. Dérivées usuelles

1. Dérivées des fonctions usuelles

On note $f'(x)$ la dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à x sur l'intervalle I.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$k\ (constante)$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$n\, x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$ln\ x$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$sin\ x$	$\mathbb{R}$	$cos\ x$
$cos\ x$	$\mathbb{R}$	$-\ sin\ x$
$tan\ x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + tan^2\ x\ = \frac{1}{cos^2 x}$
$arccos(x)$	$]-1{,}1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arcsin(x)$	$]-1{,}1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

2. Opérations et dérivées

Soient u et v sont deux fonctions de x dérivables sur un intervalle I à valeurs réelles.

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \qquad (\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{u})' = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{u}'\,,\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \qquad (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{u}'}{\boldsymbol{u}^2} \qquad \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}^2}$$

Dérivée d'une composée de fonction : $(\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{u})' = \boldsymbol{u}' \times (\boldsymbol{v}'\circ\boldsymbol{u}) \quad si\ u(I) \subset I$

qui peut s'écrire aussi : $\dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} = \dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{du}} \times \dfrac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	**Condition**	$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$
$u^n, n \in \mathbb{N}$	Aucune	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}, n \in \mathbb{N}$	$u(x) \neq 0\ sur\ I$	$-\dfrac{n\,u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0\ sur\ I$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$ln\ u$	$u(x) > 0\ sur\ I$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	Aucune	$u'e^u$
$sin\ u$	Aucune	$u'\ cos\ u$
$cos\ u$	Aucune	$-\ u'\ sin\ u$

II. Primitives usuelles

1. Primitives des fonctions usuelles

On note $F(x)$ une primitive à une constante C près de la fonction $f(x)$ par rapport à x, sur l'intervalle I.

$\boldsymbol{f(x)}$	**I**	$\boldsymbol{F(x)}$
$k\ (constante)$	$\mathbb{R}$	k
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$ln\, x$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$	$2\sqrt{x}$
$ln\, x$	$\mathbb{R}^{*+}$	$x\, ln\, x - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\, e^{ax}$
$cos\, (ax), a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\, sin\, (ax)$
$sin\, (ax), a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\, cos\, (ax)$
$1 + tan^2\, x\ = \frac{1}{cos^2 x}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$tan\, x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$arccos(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$arctan(x)$

2. Primitive d'une fonction u(x)

U et V sont deux primitives de u et v.

1 primitive de $\boldsymbol{u + v : U + V}$

1 primitive de $\boldsymbol{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda U}$

Conséquence de la formule de la dérivée d'une composée

$\boldsymbol{f(x)}$	**Condition**	$\boldsymbol{F(x)}$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	Aucune	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0 \; sur \; I$	$-\frac{1}{u} + C$
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$u(x) \neq 0 \; sur \; I$	$-\frac{1}{(n-1)\, u^{n-1}} + C$
$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0 \; sur \; I$	$ln\, u + C$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u(x) > 0 \; sur \; I$	$2\sqrt{u} + C$
$u'e^u$	Aucune	$e^u + C$
$u' \cos u$	Aucune	$\sin u + C$
$u' \sin u$	Aucune	$-\cos u + C$