OM 5 – Résoudre une équation différentielle

I. Principe général de résolution

On se limite ici aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre n, dont la forme générale est :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = F(t).$$

Les termes a_k sont des coefficients constants et F(t) est le second membre de l'équation différentielle.

Pour résoudre ce type d'équation, on applique une méthode à connaître par cœur qui consiste à déterminer une **solution homogène** $y_H(t)$ et une **solution particulière** $y_P(t)$.

La solution générale est alors $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

1. Recherche de la solution homogène $y_H(t)$

On montre que les fonctions du type exp(rt), où r est une solution de **l'équation caractéristique** : $\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$, sont solutions de l'équation différentielle sans second membre ou équation homogène associée.

La solution homogène est donc une combinaison linéaire de ces solutions :

$$y_H(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \exp(r_i t).$$

Les termes K_i sont des constantes d'intégration (elles se détermineront avec les conditions initiales).

2. Recherche d'une solution particulière $y_P(t)$ de l'équation complète

On se base sur le principe suivant *(suffisant pour les équations que nous rencontrerons en physique)* : **il existe une solution particulière de la « même forme » que le second membre**.

→ *Si F(t) est une constante : $y_P = Cte$.*
→ *Si F(t) est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, $y_P(t) = Y_m \cos(\omega t+\varphi)$, on utilise alors la méthode complexe…*

3. Détermination des constantes d'intégration

Si l'on a une équation différentielle d'ordre n, il existe n racines de l'équation caractéristique, il nous faudra donc déterminer n constantes d'intégration.

Pour cela, nous avons besoin de n équations indépendantes. Ces équations seront fournies par **les conditions initiales sur y et ses dérivées.**

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants usuelles

1. Equation d'ordre 1

Equation homogène type : $\dot{y} + \frac{1}{\tau} y = 0$

Exemples : charge d'un condensateur dans un circuit RC, vitesse d'un objet lors de sa chute avec une force de frottement fluide linéaire.

Equation caractéristique : $Y + \frac{1}{\tau} = 0 \Longrightarrow\ Y = -\frac{1}{\tau}$ ⇒ Solution homogène : $\boldsymbol{y_H(t) = K\, exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$,

K se détermine avec la condition initiale y(0). K a la même dimension que y et τ la même que t.

2. Equation d'ordre 2

Equation homogène type : $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

Equation qui se rencontre lors de l'étude de système susceptible d'osciller (OHA). Q est alors le facteur de qualité de l'oscillateur et ω_0 sa pulsation propre.
Exemples : tension aux bornes d'un condensateur lors du régime transitoire d'un circuit RLC série, étude d'un ressort avec amortissement fluide proportionnel à la vitesse…

Equation caractéristique : $Y^2 + \frac{\omega_0}{Q} Y + {\omega_0}^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. **Le type de solution dépend du signe du discriminant.**

→ **$\Delta < 0$, $Q > \frac{1}{2}$:** ***les*** 2 racines sont complexes conjuguées $Y_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

Solution homogène : $\boldsymbol{y_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}$ avec $\Omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$

Dans le cas d'un OHA : il s'agit d'une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante ($\frac{\omega_0}{Q} > 0$) : on observe des oscillations amorties dont la pseudo pulsation est Ω.
Le régime est dit pseudopériodique.

→ **$\Delta > 0$, $Q < \frac{1}{2}$** : les 2 racines sont réelles et distinctes $Y_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

Solution homogène : $\boldsymbol{y_H(t) = Ae^{Y_1 t} + Be^{Y_2 t}}$,

Dans le cas d'un OHA, on n'observe pas d'oscillations.
Le régime est dit apériodique.

→ **$\Delta = 0$, $Q = \frac{1}{2}$** la racine est double et réelle $Y = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

Solution homogène : $\boldsymbol{y_H(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}}$.

Dans le cas d'un OHA, ***le régime est dit critique.***