



OM 6 – Nombres complexes

I. Généralités sur les nombres complexes

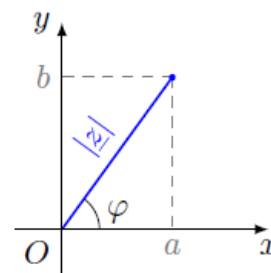
1. Forme algébrique

Un nombre complexe $\underline{z}$ se présente en général sous forme algébrique comme une somme :

$$\underline{z} = a + j b,$$

où **a et b sont des nombres réels** quelconques et où j est un nombre particulier tel que $j^2 = -1$.

Le réel a est appelé **partie réelle** de $\underline{z}$ et se note $Re(\underline{z})$, et le réel b est sa **partie imaginaire** et se note $Im(\underline{z})$.



2. Forme trigonométrique

$$\underline{z} = |\underline{z}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) = |\underline{z}| e^{j\varphi}$$

$|\underline{z}|$ est le module de $\underline{z}$ et $\varphi = \arg(\underline{z})$ est son argument

3. Lien entre les deux notations

$$Re(\underline{z}) = |\underline{z}| \cos \varphi$$

$$Im(\underline{z}) = |\underline{z}| \sin \varphi$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

II. Quelques relations

$$|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| \quad \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

$$\arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) \quad \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) [2\pi] \text{ si } b \geq 0 \\ \varphi = -\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) [2\pi] \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) [2\pi] \text{ si } a \geq 0 \\ \varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) [2\pi] \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [\pi] \text{ si } a > 0 \\ \varphi = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [\pi] \text{ si } a < 0 \\ \varphi = (\text{signe de } b) \times \frac{\pi}{2} \text{ si } a = 0 \end{cases}$$

III. Utilisation des complexes pour l'étude d'un régime sinusoïdal forcé

Pour faciliter la description des circuits en régime sinusoïdal forcé, on associe aux signaux réels des signaux complexes tels qu'à $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le signal complexe :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ (avec } j^2 = -1) \text{ tel que } s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(t))$$

Une fois le signal complexe déterminé, à partir de ponts diviseurs et/ou des lois de Kirchhoff, on peut déterminer **facilement** l'amplitude et la phase à l'origine :

L'amplitude est le module du signal complexe : $S_m = |\underline{s}(t)|$

La phase instantanée est l'argument du signal complexe : $\omega t + \varphi = \arg(\underline{s}(t))$

Pour s'affranchir de la partie temporelle, $e^{j\omega t}$, commune à l'excitation et à la réponse, on définit **l'amplitude complexe d'un signal** : $\underline{S}(t) = S_m e^{j\varphi}$. L'amplitude est le module de l'amplitude complexe et la phase à l'origine son l'argument : $S_m = |\underline{S}(t)|$ et $\varphi = \arg(\underline{S}(t))$

En notation complexe, dériver par rapport au temps revient à multiplier le signal complexe par $j\omega$: $\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \underline{s}(t)$.

En notation complexe, intégrer par rapport au temps revient à diviser le signal complexe par $j\omega$: $\int \underline{s}(t) dt = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$