

ON 6 - Dichotomie

Certaines équations ne sont pas solubles « à la main », et il faut alors recourir à une résolution numérique. Il existe plusieurs méthodes, dont la méthode par dichotomie.

I. Principe de la méthode

Soit l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue qui s'annule une fois sur l'intervalle $[a, b]$.

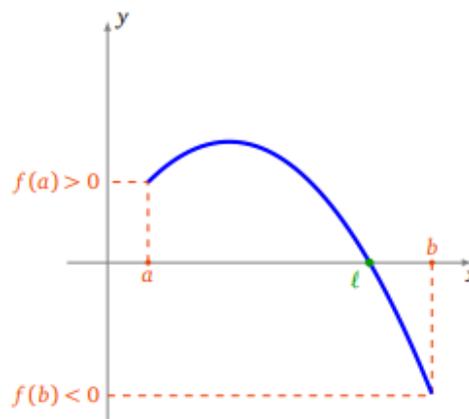
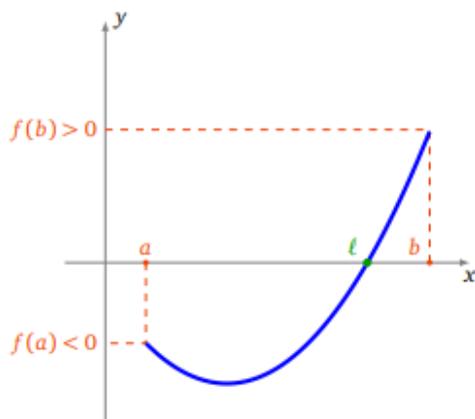
La méthode dichotomique permet de trouver une solution approchée de cette équation.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = 0$.

La condition $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle !



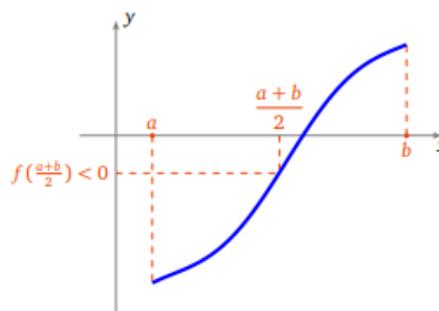
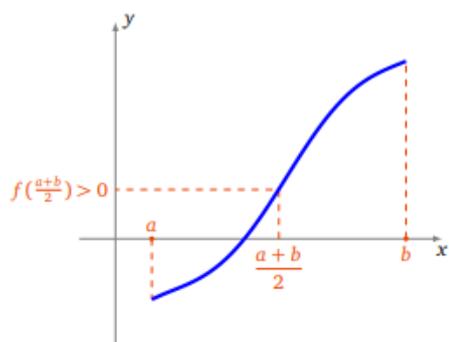
Le principe est de considérer $m = \frac{a+b}{2}$ le milieu de l'intervalle $[a, b]$, et de déterminer si le zéro recherché est entre a et m ou entre m et b .

On étudie le signe de $f(a)f(m)$:

- 1. Si $f(a)f(m) < 0$, alors la solution est dans l'intervalle $[a, m]$. Le nouvel intervalle est donc entre $a = a$ et $b = m$.**
- 2. Dans le cas contraire, la solution est dans l'intervalle $[m, b]$ et le nouvel intervalle est donc entre $a = m$ et $b = b$.**

On poursuit alors la recherche soit dans l'intervalle $[a, m]$, soit dans l'intervalle $[m, b]$, avec la même méthode.

On s'arrête quand on a assez réduit l'intervalle de recherche.



II. Algorithme

1. Principe de l'algorithme

On définit tout d'abord la fonction $f(x)$ dont on souhaite trouver le zéro. On choisit ensuite des valeurs pour a , b et la précision recherchée ϵ .

Tant que $b - a > \epsilon$, on réalise la boucle suivante :

- On pose $m = \frac{a+b}{2}$.
- Si $f(a) \times f(m) < 0$, $a = a$ et $b = m$.
- Sinon, $a = m$ et $b = b$.
- Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de m .

2. Algorithme Python

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):  
    if f(a)*f(b) > 0:  
        return None  
    while b-a > epsilon:  
        m = (a+b)/2  
        if f(a)*f(m) <= 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return m
```



III. Utilisation de la fonction bisect

En Python, la commande `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` donne accès à la recherche dichotomique. Il faut définir la fonction f dont on cherche le zéro.

Sa syntaxe s'écrit `bisect(fonction, borne_inf, borne_sup)`.

```
import scipy.optimize as op  
  
def f(x):  
    return x**2-2  
solution=op.bisect(f, 0, 2)  
print(solution)
```



