

# ON 6 - Dichotomie

Certaines équations ne sont pas solubles « à la main », et il faut alors recourir à une résolution numérique. Il existe plusieurs méthodes, dont la méthode par dichotomie.

## I. Principe de la méthode

Soit l'équation  $f(x) = 0$ , avec  $f$  une fonction continue qui s'annule une fois sur l'intervalle  $[a, b]$ .

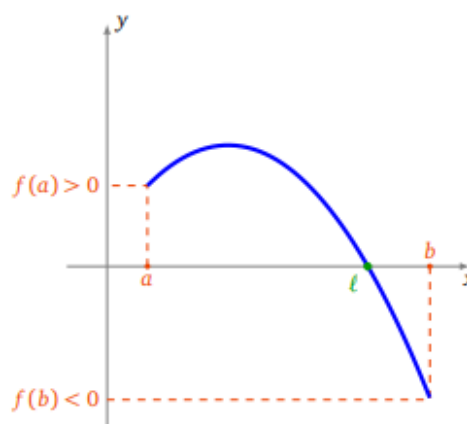
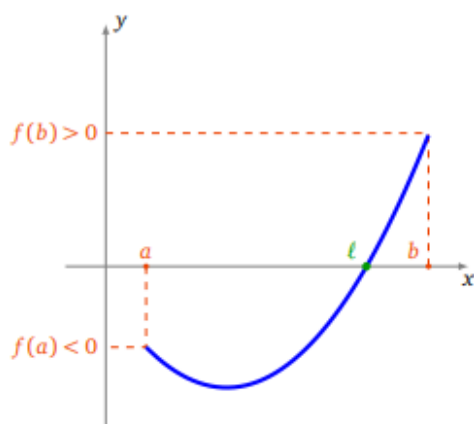
La méthode dichotomique permet de trouver une solution approchée de cette équation.

### **Théorème des valeurs intermédiaires :**

**Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un segment.**

**Si  $f(a) f(b) < 0$ , alors il existe  $\ell \in [a, b]$  tel que  $f(\ell) = 0$ .**

La condition  $f(a) \times f(b) < 0$  signifie que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle !



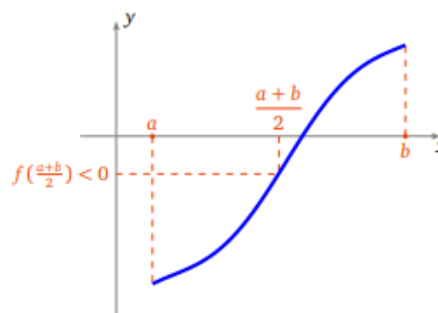
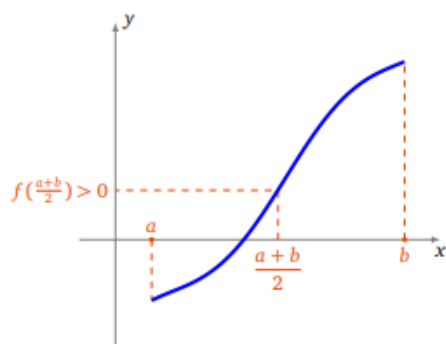
**Le principe est de considérer  $m = \frac{a+b}{2}$  le milieu de l'intervalle  $[a, b]$ , et de déterminer si le zéro recherché est entre  $a$  et  $m$  ou entre  $m$  et  $b$ .**

**On étudie le signe de  $f(a) \times f(m)$  :**

- 1. Si  $f(a) \times f(m) < 0$ , alors la solution est dans l'intervalle  $[a, m]$ . Le nouvel intervalle est donc entre  $a = a$  et  $b = m$ .**
- 2. Dans le cas contraire, la solution est dans l'intervalle  $[m, b]$  et le nouvel intervalle est donc entre  $a = m$  et  $b = b$ .**

**On poursuit alors la recherche soit dans l'intervalle  $[a, m]$ , soit dans l'intervalle  $[m, b]$ , avec la même méthode.**

**On s'arrête quand on a assez réduit l'intervalle de recherche.**



## II. Algorithme

### 1. Principe de l'algorithme

On définit tout d'abord la fonction  $f(x)$  dont on souhaite trouver le zéro. On choisit ensuite des valeurs pour  $a, b$  et la précision recherchée  $\varepsilon$ .

**Tant que  $b - a > \varepsilon$ , on réalise la boucle suivante :**

- On pose  $m = \frac{a+b}{2}$ .
- Si  $f(a) \times f(m) < 0$ ,  $a = a$  et  $b = m$ .
- Sinon,  $a = m$  et  $b = b$ .
- Lorsqu'on sort de la boucle, le zéro est donné par la valeur de  $m$ .

### 2. Algorithme Python

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    if f(a)*f(b) > 0:
        return None
    while b-a > epsilon:
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```



## III. Utilisation de la fonction bisect

En Python, la commande `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize` donne accès à la recherche dichotomique. Il faut définir la fonction  $f$  dont on cherche le zéro.

Sa syntaxe s'écrit `bisect(fonction, borne_inf, borne_sup)`.

```
import scipy.optimize as op

def f(x):
    return x**2-2
solution=op.bisect(f, 0, 2)
print(solution)
```

