Devoir maison n° 1

A rendre le 12 septembre

Formation d'un arc en ciel

Le phénomène d'arc-en-ciel est dû à la réflexion et à la réfraction des rayons du soleil dans les gouttes d'eau encore en suspension dans l'air. On supposera les gouttes d'eau sphériques et uniformément réparties.
Le schéma ci-après représente un des trajets de la lumière lorsqu'un rayon rencontre une goutte d'eau.

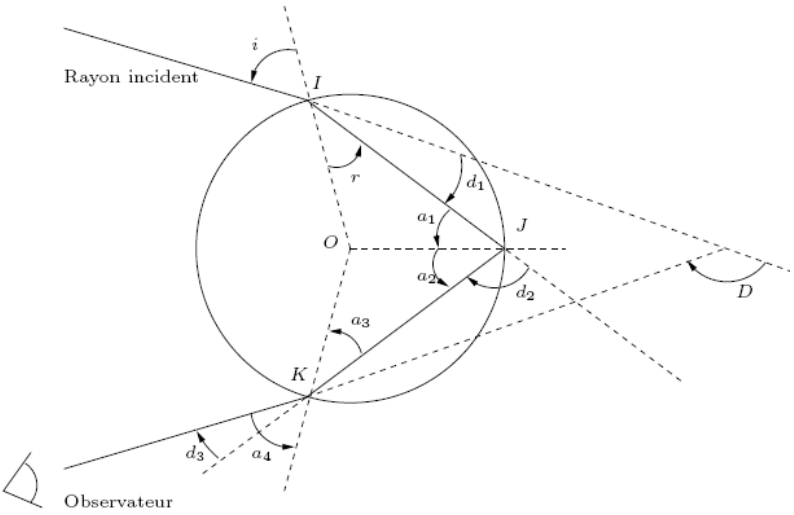

FIG. 1: Déviation des rayons du soleil par une goutte d'eau.

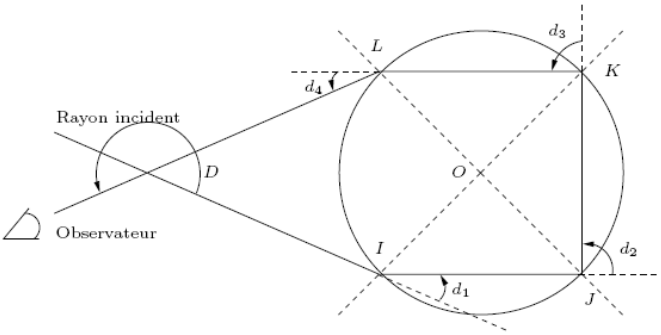

FIG. 2: Déviation après deux réflexions internes.

On appelle déviation l'angle entre le prolongement du rayon incident et le rayon émergent, cet angle est noté D.
On peut décomposer la déviation du rayon en plusieurs partie, la déviation en I par exemple est notée d_1.

Données : indice de l'eau n = 4/3, l'indice de l'air est pris égal à 1

Déviation du rayon

Q1. Exprimer une relation entre a_1, a_2, a_3 et a_4 en fonction de i et de r.
Q2. En déduire l'expression de D en fonction de i et r.
Q3. La réflexion réalisée en J par le rayon lumineux est-elle une réflexion totale ?
Q4. Dans le cas de deux réflexions, cf. figure 2, donner l'expression de la déviation D en fonction de i et r.
Q5. Monter que dans le cas de k réflexions internes, la déviation prend alors l'expression suivante :

$$D = 2i - 2r + k(\pi - 2r).$$

Extremum de déviation

Q6. Dériver la relation de Descartes $\sin i = n \sin r$ par rapport à i pour en déduire une expression de $\frac{dr}{di}$ en fonction de i et r.
Q7. En déduire l'expression de $\frac{dD}{di}$.
Q8. Démontrer que D admet un extremum pour $i = i_m$ tel que $\cos^2 i_m = \frac{n^2-1}{(1+k)^2-1}$.

Q9. Faire l'application numérique pour $k = 1$ et $k = 2$. Que se passe-t-il si $k = 0$?
Q10. Calculer la valeur de D_m correspondante dans les cas $k = 1$ et $k = 2$.

Forme de l'arc-en-ciel - Couleurs

Q11. L'observateur reçoit un maximum d'intensité lumineuse (i.e. gouttes brillantes) lorsqu'il regarde dans la direction correspondant à l'angle de déviation D_m, cf. figure 3. Justifier en traçant la courbe $D(i)$ pour $k = 1$. Pourquoi ne peut-on observer d'arc en ciel si $k = 0$?

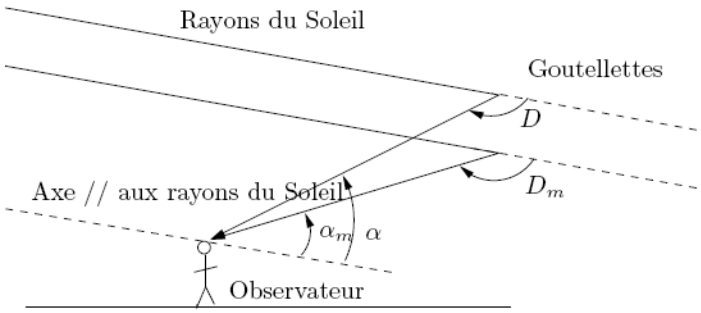

FIG. 3: Direction du maximum d'intensité lumineuse.

Q12. Donner l'expression de l'angle α_m dans le cas k = 1 et k = 2.
Q13. Définir la zone de l'espace dans laquelle se trouvent les gouttes brillantes pour l'observateur.
Q14. L'eau possède un indice légèrement différent pour chacune des couleurs :
- Pour λ = 400 nm, $n_b = n + 5.10^{-3}$
- Pour λ = 800 nm, $n_r = n - 5.10^{-3}$

a) A quelles couleurs correspondent ces deux longueurs d'onde ?
b) Calculer α_m pour ces deux couleurs, pour $k = 1$. Que voit alors l'observateur ?
c) Calculer α_m pour ces deux couleurs, pour $k = 2$. Quelle est la position de ce second arc-en-ciel ? Quel est l'ordre des couleurs ?

Q15. Pourquoi le second arc-en-ciel est-il rarement visible ?