
Chapitre 5

Circuits linéaires du 1^{er} ordre

I. Etude du circuit R, C série

1. Les condensateurs
 - 1.1 Relation fondamentale
 - 1.2 Comportement en régime continu
 - 1.3 Aspect énergétique
2. Réponse à un échelon de tension : charge du condensateur
 - 2.1 Montage :
 - 2.2 Conditions initiales
 - 2.3 Régime établi
 - 2.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$
 - 2.5 Etude énergétique
3. Régime libre : décharge du condensateur
 - 3.1 Montage :
 - 3.2 Conditions initiales
 - 3.3 Régime établi
 - 3.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$
 - 3.5 Etude énergétique

II. Etude du circuit R, L série

1. Les bobines
 - 1.1 Relation fondamentale
 - 1.2 Comportement en régime continu
 - 1.3 Aspect énergétique
2. Réponse à un échelon de tension : retard à l'établissement du courant
 - 2.1 Montage :
 - 2.2 Conditions initiales
 - 2.3 Régime établi
 - 2.4 Régime transitoire : évolutions de $i(t)$ et $u(t)$
 - 2.5 Etude énergétique
3. Régime libre : retard à l'annulation du courant
 - 3.1 Montage
 - 3.2 Conditions initiales
 - 3.3 Régime établi
 - 3.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$
 - 3.5 Etude énergétique



Un tramway qui carbure aux supercondensateurs



Après la Bluecar, [Bolloré](#) récidive avec le Bluetram, dont la sortie sera suivie du Bluebus. Le Bluetram n'a, en fait, rien d'un tramway puisqu'il n'utilise ni rails ni caténaire. Il a toutes les apparences d'un bus avec la particularité d'embarquer des supercondensateurs qui allient une très bonne capacité et une charge ultrarapide. Les supercondensateurs sont capables de résister à plusieurs millions de cycles charge/décharge sans se dégrader et voir leurs performances diminuer.

Six Bluetram rouleront pendant la COP21.

Chaque Bluetram est équipé de 30 modules de 20 supercapacités de 3 000 farads chacune, installés sur le toit pour stocker l'énergie de propulsion. Il peut ainsi parcourir environ deux kilomètres par « plein » d'électricité. Le tramway électrique se recharge alors à chaque station en à peine 20 secondes, grâce à une perche télescopique de recharge, profitant de la montée et de la descente des passagers. Bolloré a inauguré en janvier 2015 l'usine qui devra lui permettre de produire 100 Bluetram par an, et 3 000 modules électriques. Une première version de 6 mètres de long, qui peut transporter 25 personnes a été livrée fin 2015, tandis qu'une version de 12 mètres est prévue pour 2016. À l'occasion de la COP21, six Bluetram seront testés sur les Champs Élysée, du 15 novembre 2015 au 15 janvier 2016.

Source : [Un tramway qui carbure aux supercondensateurs \(usinenouvelle.com\)](http://usinenouvelle.com)

Le cours

Lorsqu'on ferme un circuit pour le mettre en fonction, les courants et les tensions peuvent mettre un certain temps à s'établir. Le régime d'un système stable commence par être **transitoire** pendant un temps dépendant de ses caractéristiques, puis passe dans un **régime dit établi ou permanent**.

Pour illustrer cela, nous étudierons 2 montages de base : les circuits « RC et RL »

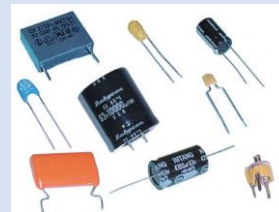
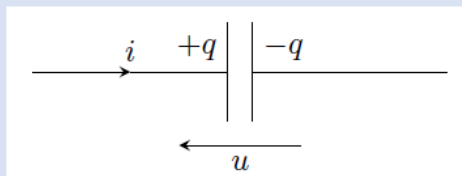
I. Etude du circuit R, C série

1. Les condensateurs

Un condensateur est un composant électronique constitué de deux surfaces conductrices appelées armatures, en influence totale (notion étudiée en 2^{ème} année) et séparées par un isolant (matériau diélectrique).

Soumis à une différence de potentiel, le condensateur accumule des charges opposées $+q$ et $-q$ sur les armatures.

La propriété principale d'un condensateur est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures.



Pour un condensateur parfait dans l'ARQS, la valeur absolue de ces charges est proportionnelle à la valeur absolue de la tension qui lui est appliquée :

$$q(t) = C u(t)$$

C est la capacité du condensateur, elle s'exprime en farad (F), $C > 0$

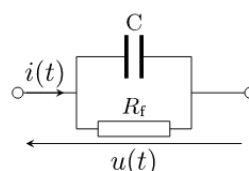
Ordres de grandeurs de C :

Condensateurs non polarisés, en mica ou céramique : de l'ordre du nF ou mF

Condensateurs polarisés électrochimiques : de l'ordre du mF

Supercondensateurs de l'ordre de 1 à 10^3 F

Remarque : Le condensateur parfait n'est qu'un modèle idéalisé. Dans un condensateur réel, le matériau isolant n'est pas parfait, il existe un courant de fuite. On modélise ce phénomène par une résistance de fuite de grande valeur (du $M\Omega$ à la centaine de $M\Omega$) en parallèle du condensateur parfait, permettant au courant de circuler d'une armature à l'autre.



Dans la suite, sauf mention contraire, nous ne rencontrerons que des condensateurs parfaits.

1.1 Relation fondamentale

On a vu que l'intensité du courant est définie comme la quantité de charge traversant une section de conducteur par unité de temps, ce déplacement de charge génère pendant une durée dt une variation $\pm dq$ de la charge portée par chaque armature, ainsi $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

Relation courant tension d'un condensateur parfait en convention récepteur :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Le condensateur est un dipôle **linéaire**.

1.2 Comportement en régime continu

En régime continu, $u(t) = \text{constante}$, donc $i(t) = 0$.

En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



1.3 Aspect énergétique

La puissance électrique algébriquement reçue par le condensateur est :

$$P(t) = u(t)i(t) = u(t)C \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u(t)^2 \right)$$

Cette puissance peut être positive ou négative selon la variation de $u(t)$, ainsi un condensateur peut se comporter comme un récepteur ou un générateur.

On peut en déduire l'expression de l'énergie emmagasinée dans un condensateur à l'instant t :

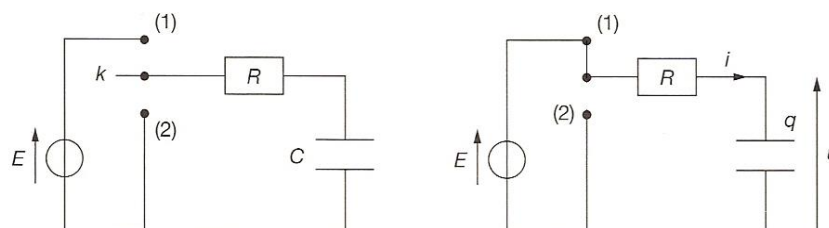
$$E_e(t) = \frac{1}{2} C u(t)^2$$

L'énergie d'un système ne peut varier que de façon continue (la puissance ne peut pas être infinie), il en est donc de même pour la tension et la charge d'un condensateur.

La tension aux bornes d'un condensateur est continue. Le condensateur s'oppose ainsi aux variations de la tension à ses bornes.

2. Réponse à un échelon de tension : charge du condensateur

2.1 Montage :



Le condensateur est initialement déchargé. A $t = 0$, on bascule l'interrupteur k en position (1).

2.2 Conditions initiales

Les conditions initiales se déterminent en écrivant la continuité de la charge et de tension aux bornes du condensateurs ainsi que la loi des mailles.

Juste avant la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^-$	Juste après la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^+$
Condensateur initialement déchargé $q(0^-) = 0$ $q = Cu$ donc $u(0^-) = 0$	Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$: $u(0^+) = 0$
Interrupteur k ouvert : $i(0^-) = 0$	Loi des mailles à $t = 0^+$: $E = u(0^+) + Ri(0^+)$ $i(0^+) = \frac{E}{R}$ L'intensité du courant i est donc discontinue à $t = 0$

2.3 Régime établi

Le régime établi (ou permanent) se détermine à l'aide du circuit équivalent. En régime continu, cela consiste à remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert.

Déterminer les valeurs de la tension u et du courant i en régime établi, notées respectivement u_∞ et i_∞ .

2.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$

Nous souhaitons maintenant étudier les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ entre l'instant où on ferme l'interrupteur k et l'instant où le régime est établi.

- Loi des mailles pour $t > 0$: $E = u(t) + Ri(t)$
- Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre :

Comme $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$, l'équation précédente devient : $E = u(t) + RC \frac{du(t)}{dt}$

- Forme canonique de l'équation différentielle :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

- Résolution de l'équation différentielle :

- La solution homogène $u_h(t)$ est solution de l'équation homogène : $\frac{du_h(t)}{dt} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0$

$u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, où A est une constante réelle

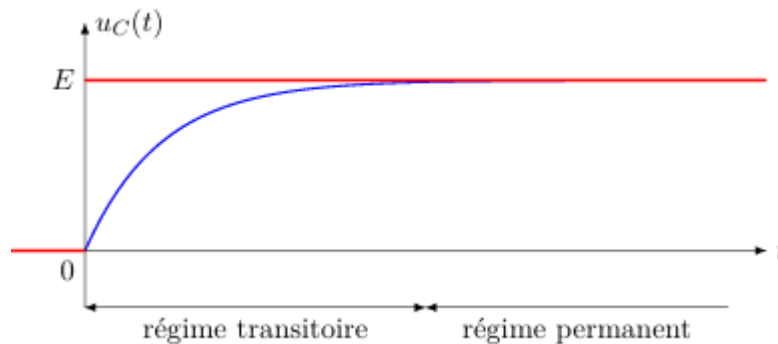
- Le second membre étant constant la solution particulière u_p est une constante : $u_p = E$
- La solution générale est : $u(t) = u_h(t) + u_p = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$

Il est intéressant de remarquer que $\lim_{t \rightarrow \infty} u_h(t) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_p = E$: la solution particulière correspond à la valeur en régime établi.

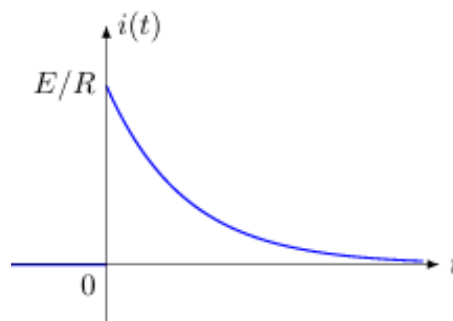
- Détermination de la constante A à partir des conditions initiales (à $t = 0^+$) : $u(0^+) = 0$

$$u(0) = u_h(0) + u_p = Ae^{-\frac{0}{\tau}} + E = A + E \quad \text{donc : } A = -E$$

Expression de la tension aux bornes du condensateur : $u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$



L'intensité du courant se déduit de $u(t)$ (ou de la loi des mailles) : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$



- Lorsque l'interrupteur k est en position (1), le courant circule dans le sens représenté ($i(t) > 0$) et le condensateur se charge : la charge q et la tension u augmentent.
- La tension aux bornes du condensateur croît **progressivement** pour atteindre la valeur de la tension imposée par le générateur de tension constante E et l'intensité tend **progressivement** vers zéro (le condensateur finit par se comporter comme un interrupteur ouvert) : le **régime est transitoire**, il précède le régime établi.

La durée $\tau = RC$, constante de temps du circuit, apparaît comme une durée caractéristique de l'évolution du système : elle donne un ordre de grandeur du temps que mettent les grandeurs électriques pour atteindre leur valeur en régime établi.

Tension à $\tau, 3\tau, 5\tau$	Intensité du courant à $\tau, 3\tau, 5\tau$
$u(\tau) \approx 0,63E$ soit 63% de E	$i(\tau) \approx 0,37E/R$ soit 37% de E/R
$u(3\tau) \approx 0,95E$	$i(3\tau) \approx 0,05E/R$
$u(5\tau) \approx 0,99E$	$i(5\tau) \approx 0,01E/R$

On considère souvent que la durée du régime transitoire est 5τ et qu'au-delà de cette durée, le circuit a atteint le régime établi.

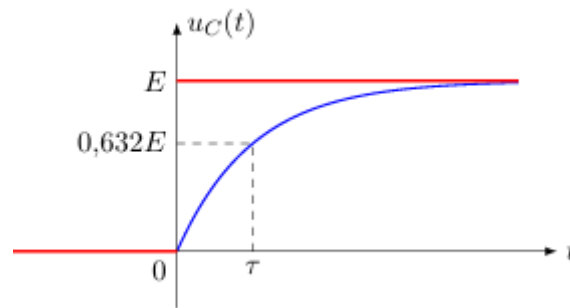
Les paramètres qui ont une influence sur la rapidité de cette évolution sont :

- La capacité C du condensateur : plus C est grande, plus u met de temps pour tendre vers E
- La résistance R : plus R est grande, plus u met de temps pour tendre vers E

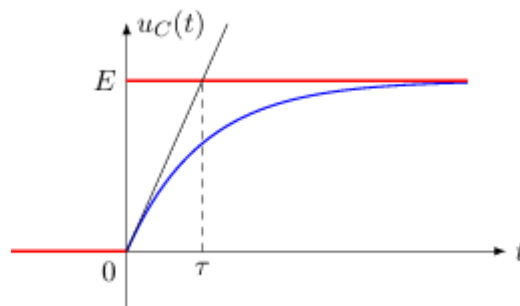
La valeur de E n'a par contre aucune influence sur la rapidité d'évolution.

Détermination graphique de τ :

- **Méthode des 63 % : $u(t) = 0,63 E$**



- **Méthode de la tangente à l'origine : la tangente à l'origine (à la date $t = 0^+$) de la courbe $u(t)$ ou de la courbe $i(t)$ coupe l'asymptote horizontale du régime établi (quand $t \rightarrow \infty$) à la date τ .**



2.1 Etude énergétique

- Loi des mailles pour $t \geq 0$: $E = u(t) + Ri(t)$
- Bilan de puissance : en multipliant la loi des mailles par $i(t)$

$$Ei(t) = u(t)i(t) + Ri(t)^2 \quad \text{soit : } P_G(t) = P(t) + P_R(t)$$

$P_G(t) = Ei(t)$, puissance algébriquement fournie par le générateur, > 0

$P(t) = u(t)i(t)$, puissance algébriquement reçue par le condensateur, > 0

$P_R(t) = u_R(t)i(t) = Ri(t)^2$, puissance algébriquement reçue par la résistance, > 0 , dissipée par effet Joule

Bilan d'énergie entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$: $\Delta E_G = \Delta E_e + \Delta E_R$

- Energie fournie par le générateur pendant la charge :

$$\Delta E_G = \int_0^{+\infty} P_G(t) dt = E \int_0^{+\infty} i(t) dt = EC \int_0^{+\infty} du = EC[u(+\infty) - u(0)] = CE^2$$

- Energie reçue par le condensateur pendant la charge : $\Delta E_e = \frac{1}{2}Cu(+\infty)^2 - \frac{1}{2}Cu(0)^2 = \frac{1}{2}CE^2$
 $\Delta E_e > 0$, **cette énergie est stockée par le condensateur.**
- Energie reçue par la résistance pendant la charge, dissipée par effet Joule :

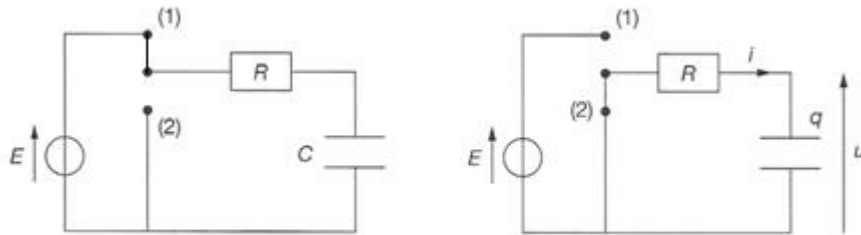
$$\Delta E_R = \Delta E_G - \Delta E_e = \frac{1}{2}CE^2$$

Il y a donc égale répartition de l'énergie fournie par le générateur pendant la charge entre la résistance (énergie dissipée par effet Joule) et le condensateur (énergie stockée).

3. Régime libre : décharge du condensateur

3.1 Montage

Le condensateur est maintenant chargé sous la tension E . A $t = 0$, on bascule l'interrupteur k en position (2).



Le condensateur est maintenant chargé sous la tension E . A $t = 0$, on bascule l'interrupteur k en position (2).

3.2 Conditions initiales

Juste avant la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^-$	Juste après la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^+$
Condensateur initialement chargé $u(0^-) = E$	Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$: $u(0^+) = E$
Interrupteur k en position (1) depuis longtemps : $i(0^-) = 0$	Loi des mailles à $t = 0^+$: $0 = u(0^+) + Ri(0^+)$ $i(0^+) = -\frac{E}{R}$ L'intensité du courant i est donc discontinue à $t = 0$

3.3 Régime établi

Déterminer les valeurs de la tension u et du courant i en régime établi, notées respectivement u_∞ et i_∞ .

3.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$

Nous souhaitons maintenant étudier les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ entre l'instant où on bascule l'interrupteur k en position 2 et le régime établi.

- Loi des mailles pour $t > 0$: $0 = u(t) + Ri(t)$

- Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre :

Comme $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$, l'équation précédente devient : $0 = u(t) + RC \frac{du(t)}{dt}$

- Forme canonique de l'équation différentielle :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$$

où $\tau = RC$ est ici aussi la constante de temps du circuit.

- Résolution de l'équation différentielle :

La solution générale est : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, où A est une constante réelle.

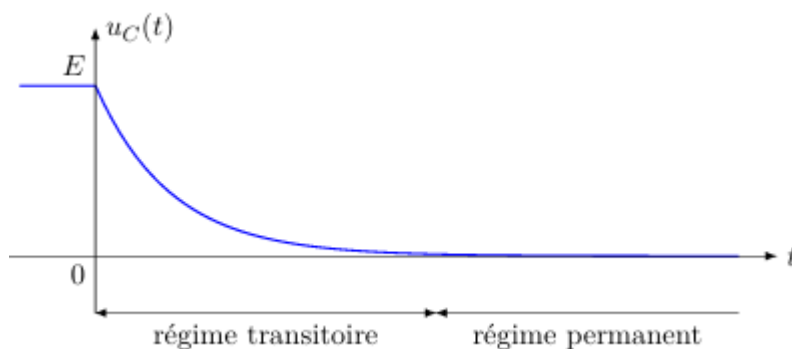
La réponse libre du système est la solution homogène de l'équation différentielle précédente mais avec des conditions initiales différentes.

Il est intéressant de remarquer qu'en l'absence de 2nd membre, la solution particulière est $u_p = 0$: la solution particulière correspond là encore à la valeur en régime établi.

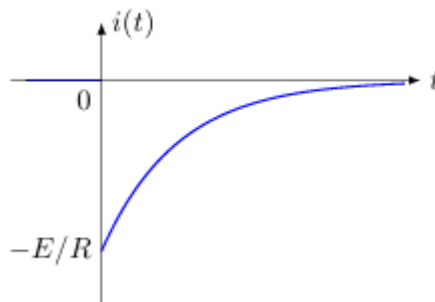
- Détermination de la constante A à partir des conditions initiales (à $t = 0^+$) : $u(0^+) = E$

$$u(0) = Ae^{-\frac{0}{\tau}} = E \quad \text{donc : } A = E$$

Expression de la tension aux bornes du condensateur : $u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$



L'intensité du courant se déduit de $u(t)$ (ou de la loi des mailles) : $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$



- Lorsque l'interrupteur k bascule en position (2), le courant circule dans le sens opposé à celui représenté ($i(t) < 0$) : le condensateur se décharge, la charge q et la tension u diminuent.
- La tension aux bornes du condensateur et l'intensité tendent **progressivement** vers zéro : le **régime est transitoire**, il précède le régime établi.

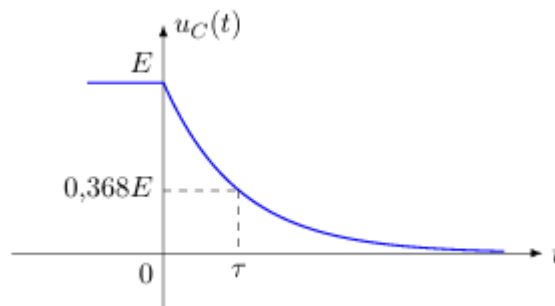
La durée $\tau = RC$, constante de temps du circuit, apparaît encore comme une durée caractéristique de l'évolution du système : elle donne un ordre de grandeur du temps que mettent les grandeurs électriques pour atteindre leur valeur en régime établi.

Tension à $\tau, 3\tau, 5\tau$	Intensité du courant à $\tau, 3\tau, 5\tau$
$u(\tau) \approx 0,37E$ soit 37% de E	$i(\tau) \approx -\frac{0,37E}{R}$ soit 37% de $-E/R$
$u(3\tau) \approx 0,05E$	$i(3\tau) \approx -0,05E/R$
$u(5\tau) \approx 0,01E$	$i(5\tau) \approx -0,01E/R$

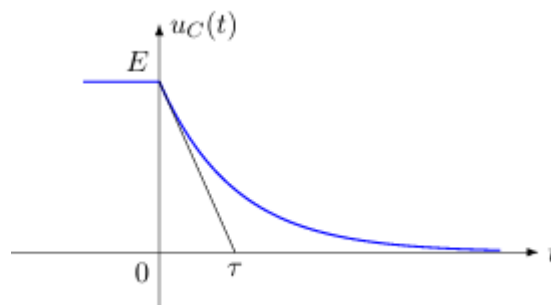
On considère ici aussi que la durée du régime transitoire est 5τ et qu'au-delà de cette durée, le circuit a atteint le régime établi.

Détermination graphique de τ :

- Méthode des 63 % : $u(t) = 0,37 E$



- Méthode de la tangente à l'origine : la tangente à l'origine (à la date $t = 0^+$) de la courbe $u(t)$ ou de la courbe $i(t)$ coupe l'asymptote du régime établi à la date τ .



3.5 Etude énergétique

- Loi des mailles pour $t \geq 0$: $0 = u(t) + Ri(t)$
- Bilan de puissance : On multiplie la loi des mailles par $i(t)$

$$0 = u(t)i(t) + Ri(t)^2 \text{ soit : } P(t) + P_R(t) = 0$$

$P(t) = u(t)i(t)$, puissance algébriquement reçue par le condensateur, < 0 .

$P_R(t) = u_R(t)i(t) = Ri(t)^2$, puissance algébriquement reçue par la résistance, > 0 , dissipée par effet Joule.

- Bilan d'énergie entre $t = 0$ et $t = +\infty$: $0 = \Delta E_e + \Delta E_R$

- Variation d'énergie dans le condensateur pendant la décharge :

$$\Delta E_e = \frac{1}{2} C u(+\infty)^2 - \frac{1}{2} C u(0)^2 = -\frac{1}{2} C E^2 < 0 : \text{énergie fournie.}$$

- Energie reçue par la résistance pendant la décharge, dissipée par effet Joule :

$$\Delta E_R = -\Delta E_C = \frac{1}{2} C E^2$$

L'énergie emmagasinée initialement par le condensateur pendant sa charge est intégralement dissipée par effet Joule dans R lors de la décharge.

Quelques applications des condensateurs : flash d'appareil photo, pacemaker, véhicule électrique (Blue Tram...)

II. Etude du circuit R, L série

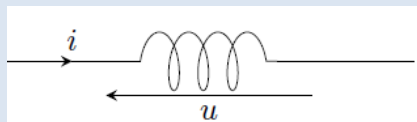
1. Les bobines

Une bobine est un enroulement de fil conducteur, siège d'un phénomène d'induction.



1.1 Relation fondamentale

Relation courant tension d'une bobine parfaite en convention récepteur :



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

L est l'inductance de la bobine, elle s'exprime en Henry (H), $L > 0$

La bobine est un dipôle **linéaire**.

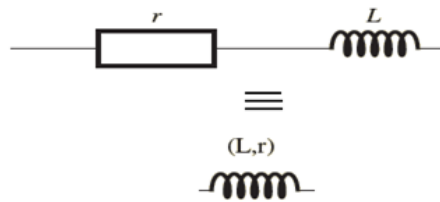
Ordres de grandeurs de L :

Bobines sans noyau de l'ordre du mH à quelques mH

Bobines avec noyau de l'ordre du H

Electroaimant de l'ordre plusieurs dizaine de H

Remarque : La bobine parfaite n'est qu'un modèle idéalisé. Dans une bobine réelle, le matériau possède une résistance non nulle. A basse fréquence, on modélise une bobine réelle par une résistance r en série avec une bobine idéale.



Dans la suite, sauf mention contraire, nous ne rencontrerons que des bobines parfaites.

1.2 Comportement en régime continu

En régime continu, $i(t) = \text{constante}$, donc $u(t) = 0$.

En régime continu, la bobine se comporte comme un fil.

AP2

1.3 Aspect énergétique

La puissance électrique (d'origine magnétique) algébriquement reçue par la bobine est :

$$P(t) = u(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li(t)^2 \right).$$

Cette puissance peut être positive ou négative selon les variations de $i(t)$, ainsi une bobine peut se comporter comme un récepteur ou un générateur.

On peut en déduire l'expression de l'énergie emmagasinée dans une bobine à l'instant t :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$$

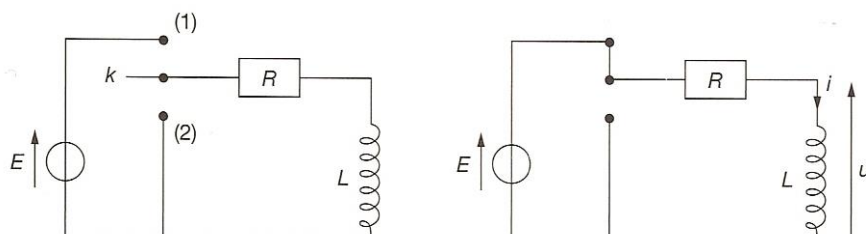
L'énergie d'un système ne peut varier que de façon continue, il en est donc de même pour l'intensité du courant traversant une bobine.

L'intensité du courant traversant une bobine est continue. La bobine s'oppose ainsi aux variations de l'intensité du courant qui la traverse (Conséquence de la loi de Lenz...).

2. Réponse à un échelon de tension : retard à l'établissement du courant

2.1 Montage

A $t = 0$, on bascule l'interrupteur k en position (1).



2.2 Conditions initiales

Les conditions initiales se déterminent en écrivant la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine ainsi que la loi des mailles.

Juste avant la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^-$	Juste après la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^+$
Interrupteur k ouvert : $i(0^-) = 0$	Continuité de l'intensité du courant dans la bobine à $t = 0$: $i(0^+) = 0$
$u(0^-) = 0$	Loi des mailles à $t = 0^+$: $E = u(0^+) + Ri(0^+)$ $u(0^+) = E$ La tension u est donc discontinue à $t = 0$

2.3 Régime établi

Le régime établi se détermine à l'aide du circuit équivalent. En régime continu, cela consiste à remplacer la bobine par un fil.

Déterminer les valeurs de la tension u et du courant i en régime établi, notées respectivement u_∞ et i_∞ .

2.4 Régime transitoire : évolutions de $i(t)$ et $u(t)$

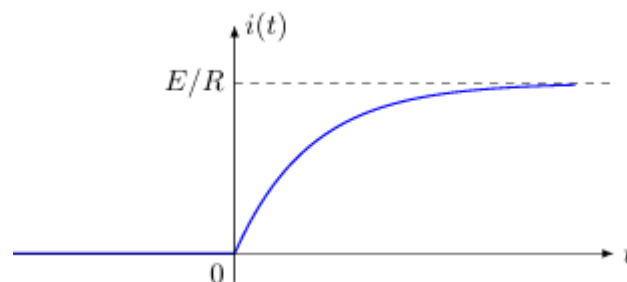
Nous souhaitons maintenant étudier les évolutions de $i(t)$ et $u(t)$ entre l'instant où on ferme l'interrupteur k et l'instant où le régime est établi.

Travail à faire :

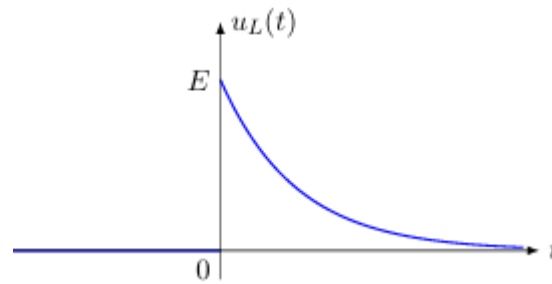
- Loi des mailles pour $t > 0$
- Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre
- Forme canonique de l'équation différentielle
- Résolution de l'équation différentielle
- Détermination de la constante A à partir des conditions initiales (à $t = 0^+$) : $i(0^+) = 0$

Il est intéressant de remarquer que $\lim_{t \rightarrow \infty} i_h(t) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = i_p = \frac{E}{R}$: la solution particulière correspond à la valeur en régime établi.

Expression de l'intensité du courant traversant la bobine : $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$



Exprimer $u(t)$.



Lorsque l'interrupteur k est en position (1), le courant croît **progressivement** pour atteindre la valeur i_∞ et la tension tend **progressivement** vers zéro (la bobine finit par se comporter comme un fil) : le **régime est transitoire**, il précède le régime établi.

La durée $\tau = \frac{L}{R}$, constante de temps du circuit, apparaît comme une durée caractéristique de l'évolution du système : elle donne un ordre de grandeur du temps que mettent les grandeurs électriques pour atteindre leur valeur en régime établi.

Intensité à $\tau, 3\tau, 5\tau$	Tension à $\tau, 3\tau, 5\tau$
$i(\tau) \approx 0,63i_\infty$ soit 63% de i_∞	$u(\tau) \approx 0,37E$ soit 37% de E
$i(3\tau) \approx 0,95i_\infty$	$u(3\tau) \approx 0,05E$
$i(5\tau) \approx 0,99i_\infty$	$u(5\tau) \approx 0,01E$

On considère ici aussi que la durée du régime transitoire est 5τ et qu'au-delà de cette durée, le circuit a atteint le régime établi.

Les paramètres qui ont une influence sur la rapidité de cette évolution sont :

- L'inductance L de la bobine : plus L est grande, plus i met de temps pour tendre vers i_∞
- La résistance R : plus R est grande, moins i met de temps pour tendre vers i_∞

La valeur de E n'a par contre aucune influence sur la rapidité d'évolution.

Détermination graphique de τ :

- **Méthode des 63 %** : $i(t) = 0,63 i_\infty$
- **Méthode de la tangente à l'origine** : la tangente à l'origine (à la date $t = 0^+$) de la courbe $i(t)$ ou de la courbe $u(t)$ coupe l'asymptote du régime établi à la date τ .

2.5 Etude énergétique

- Loi des mailles pour $t \geq 0$: $E = u(t) + Ri(t)$
- Bilan de puissance :

$$Ei(t) = u(t)i(t) + Ri(t)^2 \text{ soit : } P_G(t) = P(t) + P_R(t)$$

$P_G(t) = Ei(t)$, puissance algébriquement fournie par le générateur, > 0 .

$P(t) = u(t)i(t)$, puissance algébriquement reçue par la bobine, > 0 .

$P_R(t) = u_R(t)i(t) = Ri(t)^2$, puissance algébriquement reçue par la résistance, >0 , dissipée par effet Joule.

- Bilan d'énergie dans la bobine entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$:

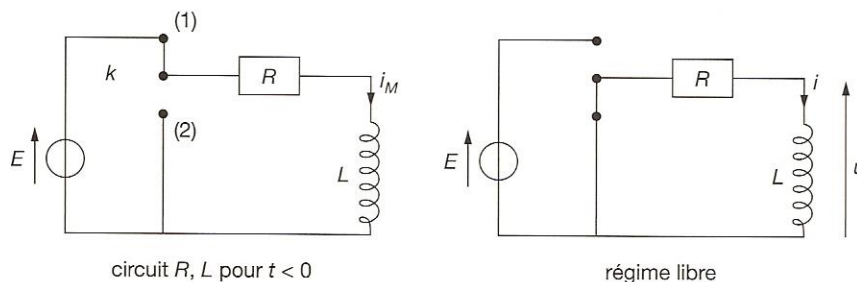
$$\Delta E_m = \frac{1}{2}Li(+\infty)^2 - \frac{1}{2}Li(0)^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2 > 0 : \text{énergie stockée.}$$

Le générateur continue de fournir de l'énergie en régime établi, contrairement au circuit RC, énergie qui est dissipée par la résistance. On ne peut pas intégrer ce bilan de puissance.

3. Régime libre : retard à l'annulation du courant

3.1 Montage

La bobine a emmagasiné de l'énergie, le régime permanent est établi, et le courant vaut $\frac{E}{R}$. A $t = 0$, on bascule l'interrupteur k en position (2).



3.2 Conditions initiales

Juste avant la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^-$	Juste après la fermeture de l'interrupteur : à la date $t = 0^+$
Courant établi $i(0^-) = \frac{E}{R}$	Continuité du courant à $t = 0$: $i(0^+) = \frac{E}{R}$
Interrupteur k en position (1) depuis longtemps : $u(0^-) = 0$ (fil)	Loi des mailles à $t = 0^+$: $0 = u(0^+) + Ri(0^+)$ $u(0^+) = -E$ La tension u est donc discontinue à $t = 0$

3.3 Régime établi

Déterminer les valeurs de la tension u et du courant i en régime établi, notées respectivement u_∞ et i_∞ .

3.4 Régime transitoire : évolutions de $u(t)$ et $i(t)$

Nous souhaitons maintenant étudier les évolutions de $u(t)$ et $i(t)$ entre l'instant où on bascule l'interrupteur k en position 2 et le régime établi.

Travail à faire

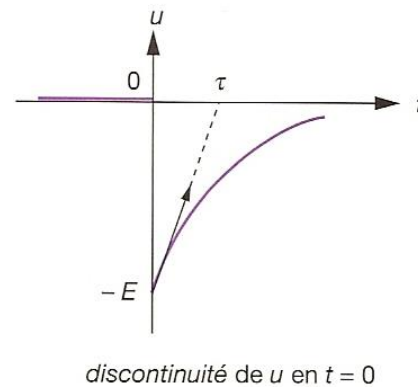
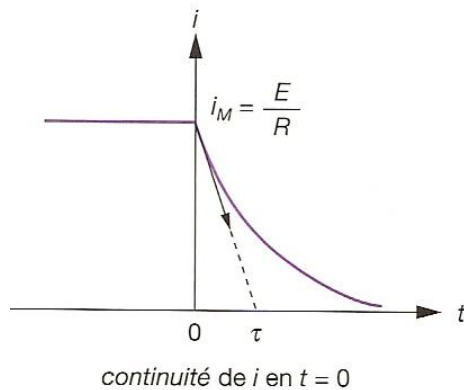
- Loi des mailles pour $t > 0$
- Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre
- Forme canonique de l'équation différentielle
- Résolution de l'équation différentielle
- Détermination de la constante A à partir des conditions initiales (à $t = 0^+$) : $i(0^+) = \frac{E}{R}$

La réponse libre du système est la solution homogène de l'équation différentielle précédente mais avec des conditions initiales différentes.

Il est intéressant de remarquer qu'en l'absence de 2nd membre, la solution particulière est $i_p = 0$: la solution particulière correspond à la valeur en régime établi.

Expression de l'intensité du courant traversant la bobine : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

 **Exprimer $u(t)$.**



- Lorsque l'interrupteur k bascule en position (2), l'intensité et la tension tendent **progressivement** vers zéro : le **régime est transitoire**, il précède le régime établi.

La durée $\tau = \frac{L}{R}$, constante de temps du circuit, apparaît encore comme une durée caractéristique de l'évolution du système : elle donne un ordre de grandeur du temps que mettent les grandeurs électriques pour atteindre leur valeur en régime établi.

Intensité à $\tau, 3\tau, 5\tau$	Tension à $\tau, 3\tau, 5\tau$
$i(\tau) \approx 0,37 \frac{E}{R}$ soit 37% de $\frac{E}{R}$	$u(\tau) \approx -0,37E$ soit 37% de $-E$
$i(3\tau) \approx 0,05 \frac{E}{R}$	$u(3\tau) \approx -0,05E$
$i(5\tau) \approx 0,01 \frac{E}{R}$	$u(5\tau) \approx -0,01E$

On considère ici aussi que la durée du régime transitoire est 5τ et qu'au-delà de cette durée, le circuit a atteint le régime établi.

Détermination graphique de τ : méthodes identiques au circuit RC

- Méthode des 63 % : $i(t) = 0,37 \frac{E}{R}$
- Méthode de la tangente à l'origine : la tangente à l'origine (à la date $t = 0^+$) de la courbe $i(t)$ ou de la courbe $u(t)$ coupe l'asymptote du régime établi à la date τ .

3.5 Etude énergétique

- Loi des mailles pour $t > 0$: $0 = u(t) + Ri(t)$
- Bilan de puissance :

$$0 = u(t)i(t) + Ri(t)^2 \text{ soit : } P(t) + P_R(t) = 0$$

$P(t) = u(t)i(t)$, puissance algébriquement reçue par la bobine, < 0 .

$P_R(t) = u_R(t)i(t) = Ri(t)^2$, puissance algébriquement reçue par la résistance, > 0 , dissipée par effet Joule.

- Bilan d'énergie entre $t = 0$ et $t = +\infty$: $0 = \Delta E_m + \Delta E_R$

- Variation d'énergie dans la bobine pendant l'annulation du courant :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}Li(+\infty)^2 - \frac{1}{2}Li(0)^2 = -\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2 < 0 : \text{énergie fournie.}$$

- Energie algébriquement reçue par la résistance, dissipée par effet Joule :

$$\Delta E_R = -\Delta E_C = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

L'énergie emmagasinée initialement par la bobine est intégralement dissipée par effet Joule dans R.

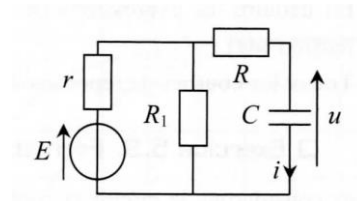
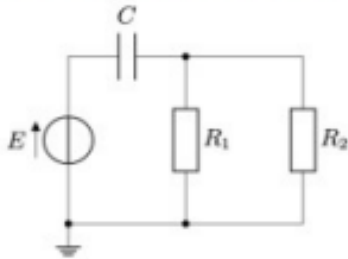
Remarque : Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le courant étant établi à i_∞ , on ouvre l'interrupteur au lieu de le basculer en position (2). Il apparaît alors deux exigences contradictoires : celle de l'expérimentateur qui veut faire passer le courant i de i_∞ à 0 et celle de la bobine qui s'oppose à toute variation brutale du courant i qui la traverse. Pour éviter cette discontinuité, la bobine va provoquer aux bornes de l'interrupteur une surtension suffisante pour ioniser l'air entre les lames de l'interrupteur. Il apparaît donc une étincelle conductrice qui referme le circuit.

Quelques applications des bobines : bobine d'allumage dans les moteurs à allumage commandé, clôture électrique, lampe à décharge, électroaimant...

Applications

Application 1 : Régime permanent condensateur

Donner les valeurs de toutes les intensités et des tensions aux bornes des condensateurs dans les 2 circuits suivants en régime permanent.



Application 2 : Régime permanent bobine

Déterminer les intensités dans les branches du circuit suivant en régime permanent.

