

## Chapitre 6

# Oscillateurs harmoniques

### I. Les oscillateurs harmoniques non amortis (OHNA)

1. Définition
2. Description d'une grandeur sinusoïdale
3. Équation différentielle d'un OHNA
4. Exemple électrique : le circuit LC
  - 4.1 Etude du circuit LC en régime libre
  - 4.2 Etude énergétique du régime libre

### II. Oscillateurs harmoniques amortis (OHA)

1. Etude du circuit RLC
2. Modèle de l'oscillateur harmonique amorti
3. Solutions de l'équation différentielle
  - 3.1 Cas  $\Delta < 0$  : Régime pseudopériodique
  - 3.2 Cas  $\Delta > 0$  : Régime apériodique
  - 3.3 Cas  $\Delta = 0$  : Régime apériodique critique
4. Bilan énergétique



*Mécanisme de montre*



*Pendule de Foucault*

## Le cours

On trouve des oscillateurs dans toutes les branches de la Physique et les exemples d'oscillateurs sont nombreux : pendule, amortisseur de voiture, corde de guitare, circuits électriques, il existe même des réactions chimiques oscillantes...

Un système est un oscillateur si au moins l'une des grandeurs qui le caractérise évolue de manière périodique ou pseudo-périodique autour d'une valeur centrale. L'oscillateur harmonique est un cas particulier d'oscillateur. Un système est un oscillateur harmonique si les grandeurs vibratoires qui le décrivent évoluent de manière sinusoïdale en fonction du temps.

Dans ce cours nous allons étudier les modèles de l'oscillateur harmonique non amorti puis de l'oscillateur harmonique amorti à partir de l'étude d'un oscillateur électrique.

**La forme des équations obtenues et donc les méthodes de traitement mathématique des équations sont générales, elles s'appliqueront à d'autres types d'oscillateurs, notamment mécaniques.**

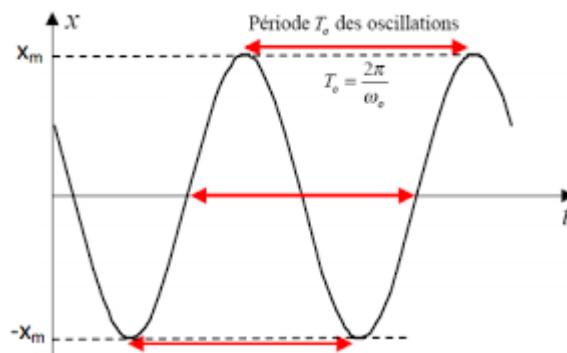
### I. Les oscillateurs harmoniques non amortis (OHNA)

#### 1. Définition

**Un oscillateur harmonique non amorti est décrit, à une constante près, par une fonction sinusoïdale.**

#### 2. Description d'une grandeur sinusoïdale

Considérons une grandeur sinusoïdale :  $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$



- **$x_m$  est l'amplitude du signal sinusoïdal**
- **$T_0$  est la période** : la période T du signal périodique quelconque est le plus petit intervalle de temps au bout duquel se reproduit le signal identique à lui-même :  $x(t) = x(t + T_0)$ .
- **$f_0 = 1/T_0$  est la fréquence en Hz** : nombre de périodes par seconde
- **$\omega_0$  est la pulsation du signal sinusoïdal** :  $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$ ,  $\omega$  peut être interprétée comme la vitesse angulaire lors d'un mouvement circulaire.
- **$(\omega_0 t + \varphi)$  est la phase instantanée (ou phase à l'instant t).**
- **$\varphi$  est la phase à l'origine (sa valeur est liée au choix de l'origine des temps)** :  $x(0) = x_m \cos \varphi$

Un tel signal peut également se mettre sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ avec } A = x_m \cos \varphi ; B = -x_m \sin \varphi ; x_m = \sqrt{A^2 + B^2} ; \tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

### 3. Equation différentielle d'un OHNA

Les oscillations peuvent se faire autour d'une valeur constante notée dans la suite du cours  $x_\infty$ , dans ce cas, pour un OHNA de paramètre  $x(t)$  :  $x(t) = x_\infty + x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

On peut remarquer que pour des oscillations autour de 0 (Cte = 0):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$$

L'équation différentielle d'un OHNA oscillant autour de 0 est  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

Généralisons à des oscillations harmoniques autour de  $x_\infty$ :

**On appelle oscillateur harmonique non amorti tout système oscillant dont le paramètre  $x(t)$  vérifie une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre du type :**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_\infty$$

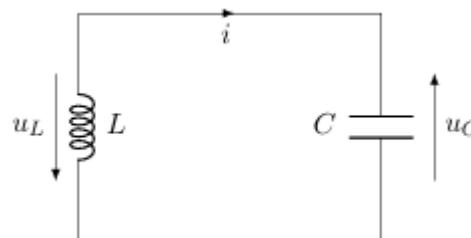
**Les solutions de cette équation sont de la forme :  $x(t) = x_\infty + x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$**

- $x_\infty$  est la valeur autour de laquelle  $x(t)$  oscille.
- $x_m$  est l'amplitude de  $x(t)$  : amplitude des oscillations.
- $\omega_0$  est la pulsation propre (rad/s) = pulsation des oscillations en l'absence de dissipation d'énergie ( $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  est la période propre, période des oscillations non amorties)
- $\varphi$  est la phase à l'origine

### 4. Exemple électrique : le circuit LC

#### 4.1 Etude du circuit LC en régime libre

- Étudions le circuit LC ci-dessous. Le condensateur est supposé initialement chargé sous la tension E.



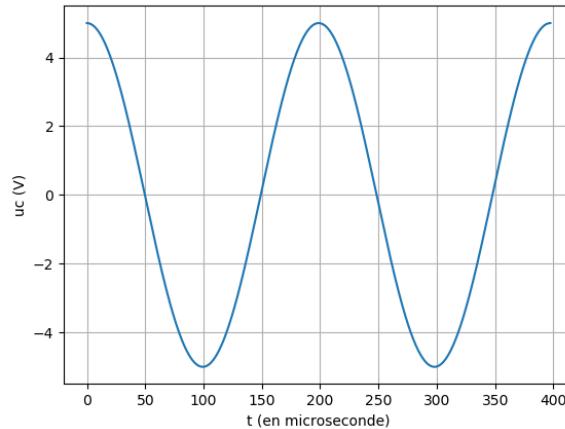
**AP 1**

**Le circuit LC est un oscillateur harmonique non amorti dont, en régime libre, la tension  $u_c$  obéit à l'équation différentielle :**

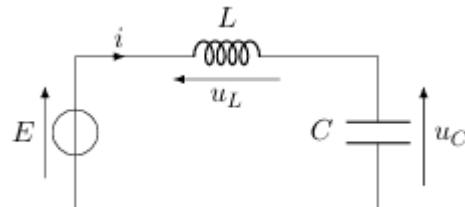
$$\ddot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

**La pulsation des oscillations est la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .**

*Exemple :  $E = 5 \text{ V}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$*



- Considérons le même circuit mais alimenté par une source de tension continue  $E$ .

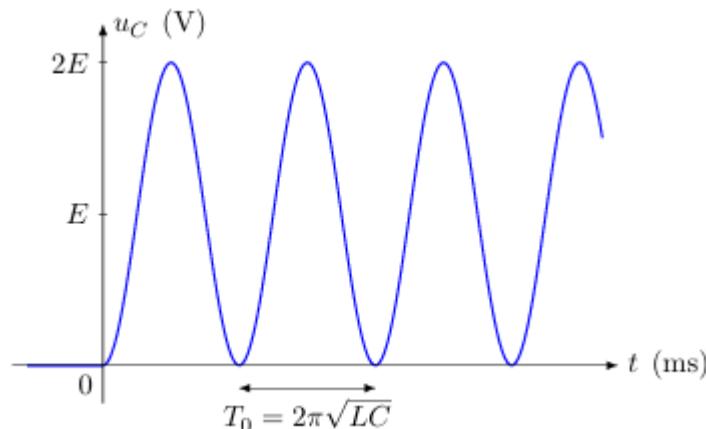


L'équation différentielle devient :  $\ddot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} E$ .

La solution est de la forme  $u(t) = E + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

$u_c(t)$  oscille maintenant autour de  $E$ .

*Cas d'un condensateur initialement déchargé :*

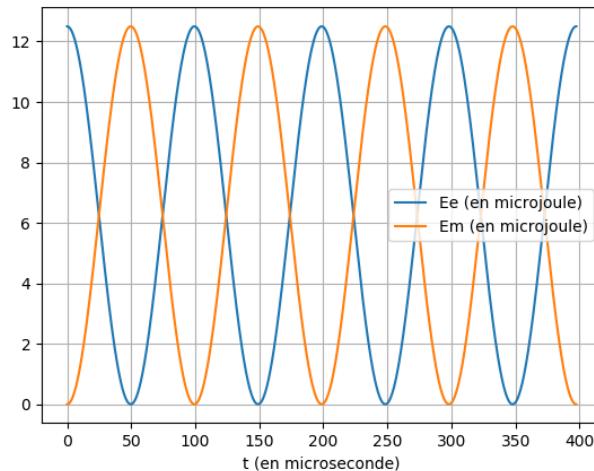


## 4.2 Etude énergétique du régime libre

L'énergie totale stockée dans le circuit LC est :  $E(t) = E_e(t) + E_m(t) = \frac{1}{2}C u_c(t)^2 + \frac{1}{2}L i(t)^2$

 AP 2

Exemple :  $E = 5 \text{ V}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$



$E(t) = Cte = E(0)$  : le transfert d'énergie entre la capacité et la bobine est totale (il n'y a pas de pertes en l'absence de résistances).

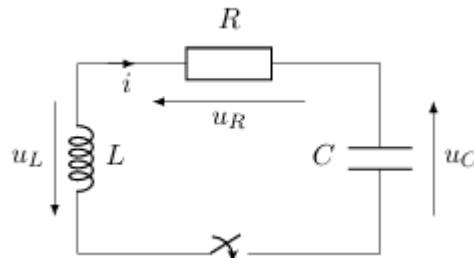
## II. Oscillateurs harmoniques amortis (OHA)

Si on réalise le montage précédent, on observe des oscillations qui s'atténuent au cours du temps. Ceci est dû à une dissipation énergétique par effet Joule dans les résistances, celle du GBF et celle de la bobine. Si on rajoute une résistance dans le circuit et que la résistance est grande, les phénomènes dissipatifs sont trop importants et on observe alors l'**absence d'oscillations**.

Nous allons rendre compte de cette dissipation d'énergie, en introduisant une résistance dans le circuit précédent.

### 1. Etude du circuit RLC

Étudions le circuit RLC ci-dessous. On suppose le condensateur initialement chargé. A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.



 AP 3

**Le circuit RLC est un oscillateur harmonique dont, en régime libre, la tension  $u_c$  obéit à l'équation différentielle :**

$$\ddot{u}_c + \frac{L}{R} \dot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = 0.$$

## 2. Modèle de l'oscillateur harmonique amorti

**Un oscillateur harmonique amorti est décrit par une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre de la forme :**

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_\infty$$

- $x_\infty$  est la valeur de  $x$  en régime établi, lorsque  $t \rightarrow \infty$
- $\omega_0$  est la pulsation propre (rad/s) = pulsation caractéristique de l'oscillateur en l'absence de dissipation d'énergie (OHNA)
- $Q$  est le facteur de qualité, nombre sans dimension qui caractérise l'amortissement

**Cas du circuit RLC série :**  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

## 3. Solutions de l'équation différentielle

Pour exprimer la **solution homogène** de l'équation différentielle type, il faut résoudre l'équation caractéristique :  $X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors les racines,  $X_1$  et  $X_2$  sont complexes conjuguées.
- Si  $\Delta > 0$  alors les racines  $X_1$  et  $X_2$  sont réelles et négatives.
- Si  $\Delta = 0$  alors  $X_1 = X_2 = X$  (racine double)

Quel que soit le signe du discriminant, la **solution particulière** :  $x_p = Cte = x_\infty$ .

### 3.1 Cas $\Delta < 0$ : Régime pseudopériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :  $X_{1,2} = \frac{-\omega_0 \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

$X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega$  et  $X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega$  avec  $\Omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$  la pseudo-pulsation.

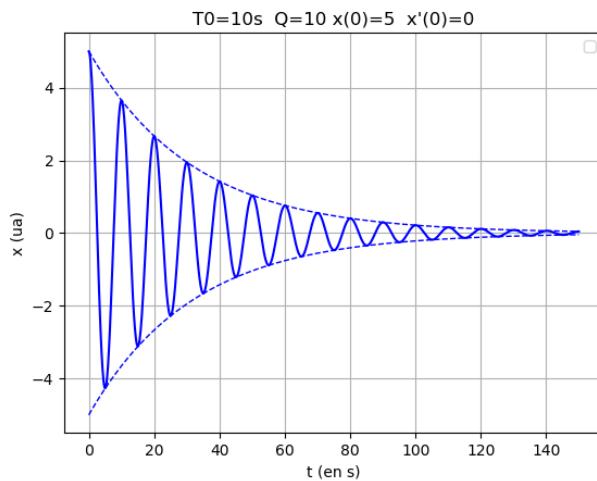
**Si  $Q > \frac{1}{2}$ , le régime est pseudo périodique et les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :**

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + x_\infty$$

avec  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$  la pseudo-pulsation des oscillations et  $x_\infty$  la valeur de  $x$  en régime permanent.

Les constantes A et B se déterminent avec les conditions initiales.

*Exemple : avec  $x_\infty = 0$*



On observe des oscillations amorties.

**On parle de régime pseudo-périodique car le régime est oscillatoire mais n'est pas périodique à cause de la diminution de l'amplitude due à l'amortissement. Le signal oscille entre deux enveloppes exponentielles de la forme  $\pm Ke^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ .**

**La partie imaginaire positive  $\Omega$  est la pseudo-pulsation des oscillations.**

$$\text{La pseudo période est : } T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

**Elle est supérieure à la période propre  $T_0$  et elle en est d'autant plus proche que le facteur de qualité  $Q$  est grand donc que l'amortissement est faible.**

L'amplitude des oscillations décroît en  $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ , comme dans le chapitre précédent, **on peut poser un temps  $\tau$  caractéristique de l'évolution de cette amplitude :  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$** . Nous savons qu'au bout de  $3\tau$  cette amplitude est inférieure à 5% de l'amplitude initiale. On peut donc dire qu'au bout de cette durée, les oscillations ont quasiment disparu.

**Avec le critère des 5%, le régime transitoire pseudo-périodique a une durée environ égale à  $3\tau = \frac{6Q}{\omega_0}$ .**

Le régime transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est grand.

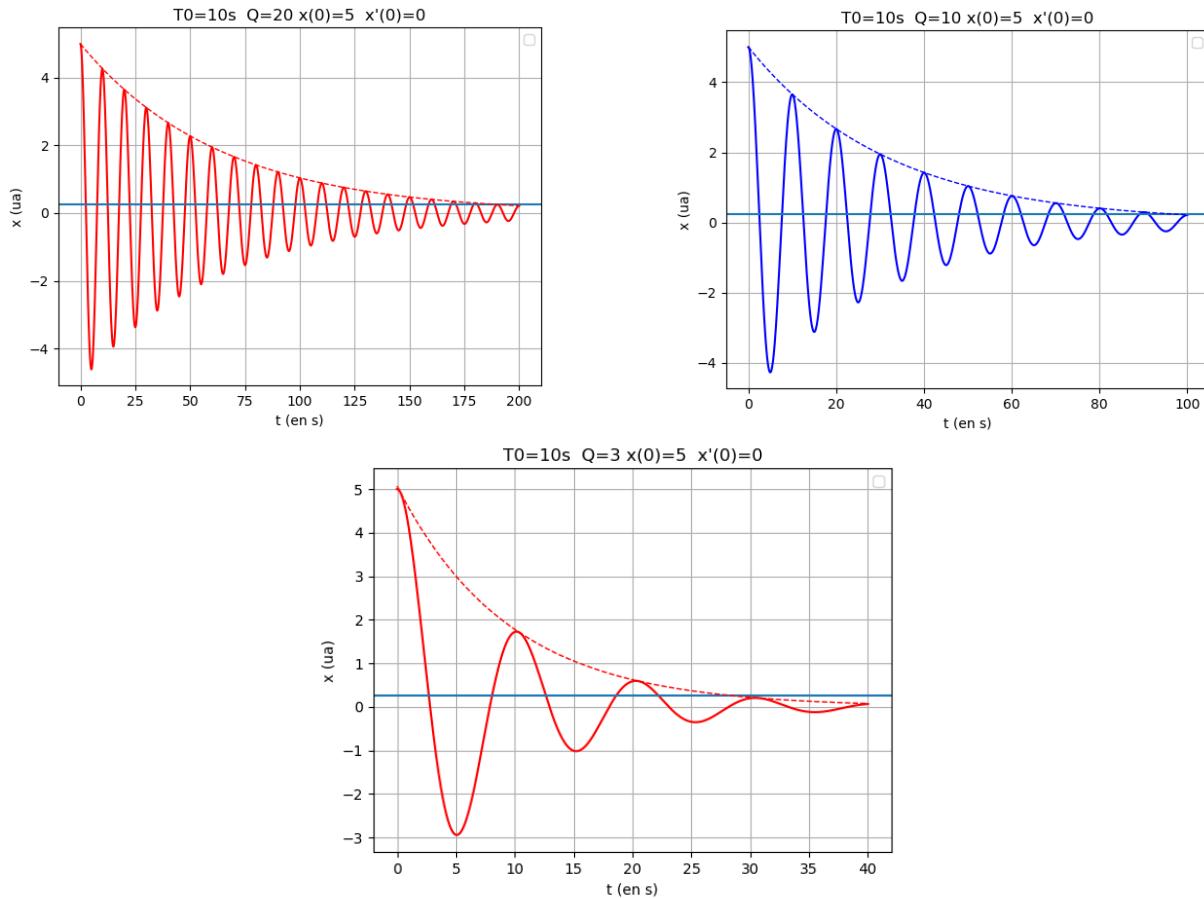
**Estimons le nombre d'oscillations :**

$$N \approx \frac{3\tau}{T} = \frac{\frac{6Q}{\omega_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}} = \frac{6Q}{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

Si Q est suffisamment grand ( $Q > 2$  suffit) alors  $N \approx \frac{6Q}{2\pi} \approx Q$

**Pour un oscillateur suffisamment peu amorti le nombre de pseudo-oscillations d'amplitude non négligeable (supérieure à 5% de l'amplitude initiale) est voisin du facteur de qualité.**

Ce résultat donne une méthode simple pour estimer le facteur de qualité d'un oscillateur : voir les courbes ci-dessous où la ligne horizontale coupe l'enveloppe à 5% de sa valeur initiale.



### 3.2 Cas $\Delta > 0$ : Régime apériodique

$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) > 0$  si  $Q < \frac{1}{2}$ . Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives :

$$X_1 = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \right) \quad \text{et} \quad X_2 = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \right)$$

**Les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et négatives.**

La solution particulière est inchangée et vaut toujours  $x_\infty$ .

La solution générale est de la forme :  $x(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} + x_\infty$

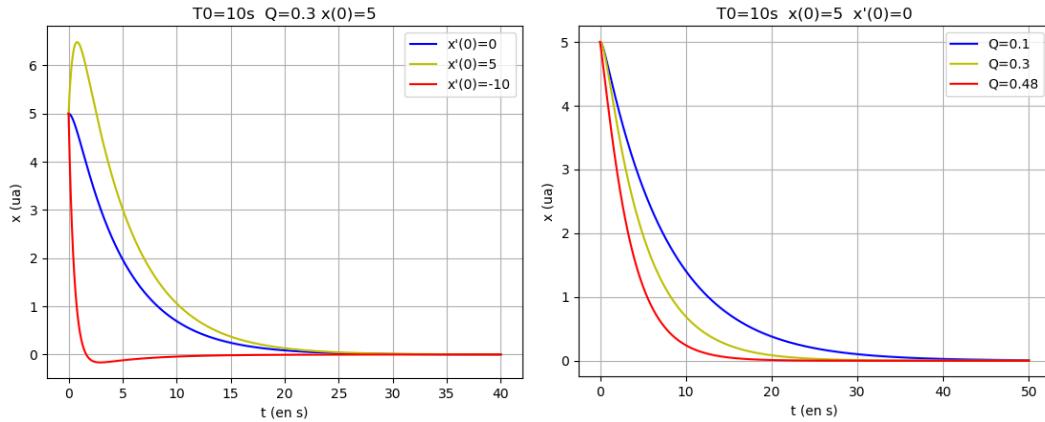
$x(t)$  est, à une constante  $x_\infty$  près, la somme de deux termes exponentiels qui tendent vers 0 : il n'y a pas d'oscillations, le régime est dit apériodique.

**Si  $Q < \frac{1}{2}$ , le régime est apériodique et la solution de l'équation différentielle est de la forme :**

$$x(t) = Ae^{X_1 t} + Be^{X_2 t} + x_\infty ,$$

**où  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales et où  $X_1$  et  $X_2$  sont les racines réelles négatives de l'équation caractéristique.**

*Exemple : avec  $x_\infty = 0$*



*L'allure des courbes dépend des conditions initiales.*

**La durée du régime transitoire est d'autant plus courte que Q est grand.**

**Estimons cette durée dans le cas où Q est petit devant 1.**

Les deux racines sont négatives : le premier terme décroît sur un temps typique  $-\frac{1}{X_1}$  et le second sur  $-\frac{1}{X_2}$ .

Comme  $|X_1| > |X_2|$ , c'est le terme  $B e^{X_2 t}$  qui décroît le plus lentement. En faisant un DL à l'ordre 1 :

$$X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \approx -\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 - 1 - \frac{1}{2}4Q^2 \right) \approx -Q\omega_0$$

**On admet donc que la durée du régime transitoire lorsque le facteur de qualité est petit devant 1 est voisine de  $\frac{3}{\omega_0 Q}$ .**

### 3.3 Cas $\Delta = 0$ : Régime apériodique critique

$\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 0$  si  $Q = \frac{1}{2}$ . L'équation caractéristique admet une **racine double réelle et négative** :

$$X = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

Dans ce cas la solution homogène de l'équation différentielle est de la forme  $x_h(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ .

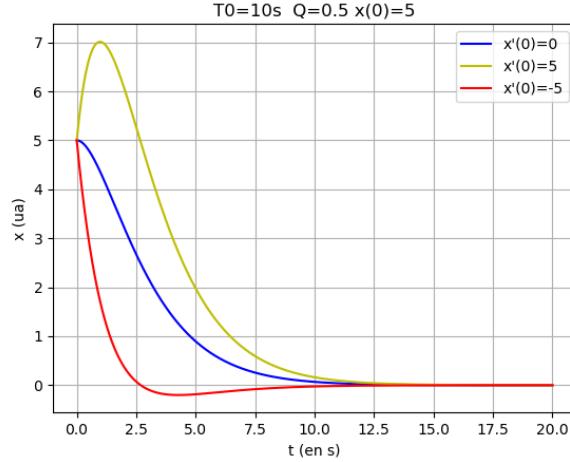
*A et B sont fixées par les conditions initiales.*

**Si  $Q = \frac{1}{2}$ , le régime est apériodique critique et la solution de l'équation différentielle est de la forme :**

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + x_\infty$$

**où A et B sont déterminées par les conditions initiales.**

*Exemple : avec  $x_\infty = 0$*



On peut poser un temps  $\tau$  caractéristique de l'évolution de cette amplitude :  $\frac{1}{\tau} = \omega_0$ , la durée du régime transitoire (à 5%) est environ  $\frac{3}{\omega_0}$ .

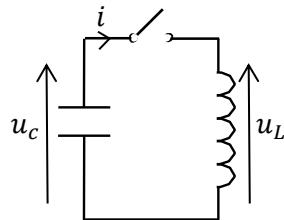
C'est le régime non oscillant qui permet un retour à l'équilibre le plus vite.

#### 4. Bilan énergétique

## Applications

### Application 1 : Circuit LC

On considère un condensateur initialement chargé sous une tension  $u_c(0)$  branché en série avec une bobine d'inductance  $L$ . On ferme l'interrupteur à  $t = 0$ . On néglige ici tout phénomène de dissipation d'énergie (absence de résistances).



- 1) Appliquer la loi des mailles et en déduire l'équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre vérifiée par la tension  $u_c$ .
- 2) Déterminer les conditions initiales  $u_c(0)$  et  $\frac{du_c}{dt}(0)$ .
- 3) Résoudre l'équation différentielle.
- 4) Quelle est la pulsation des oscillations ?
- 5) Exprimer  $i(t)$ .

Application 2: Etude énergétique du circuit LC

Exprimer l'énergie totale stockée dans le circuit LC précédent à l'instant t. Commenter.

Application 3: Circuit RLC

Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  dans le circuit RLC ci-dessous.

