TD 8 – Filtrage linéaire

Ce qu'il faut savoir et savoir faire

→ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.
→ Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
→ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
→ Exploiter le spectre d'un signal périodique (composante continue, fondamental et harmoniques).
→ Prévoir le comportement d'un filtre à basses et hautes fréquences.
→ Tracer le diagramme de Bode associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
→ Utiliser une fonction de transfert d'ordre 1 ou 2 ou ses représentations graphiques pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation périodique (pulsation de coupure, bande passante)
→ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.
→ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
→ Etudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.

J'apprends mon cours : *Questions de cours, exercices 1, 2, 6*

Questions de cours

Q1. On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?

Q2. Citer les quatre types de filtres et représenter leurs diagrammes de Bode asymptotiques respectifs.

Q3. Filtre passe-bas du premier ordre : donner sa fonction de transfert canonique, un exemple simple, son comportement asymptotique en hautes et basses fréquences. Donner l'allure du diagramme de Bode et y préciser la pulsation de coupure.

Q4. Mêmes questions pour un filtre passe-haut du premier ordre.

Q5. Filtre passe-bande du second ordre : tracer la forme du diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel pour différentes valeurs du facteur de qualité Q. Comment s'exprime la bande-passante en fonction de Q ?

Q6. Filtre passe-bas du second ordre : rappeler la condition de résonance et la valeur de la pulsation de résonance. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain pour différentes valeurs de Q.

Q7. Quel filtre choisir pour obtenir un comportement : a) intégrateur, b) dérivateur, c) moyenneur ? Dans quelles limites ?

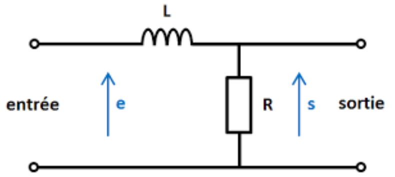
Exercices

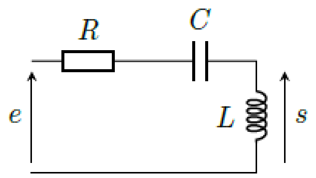
Exercice 1 : Nature d'un filtre

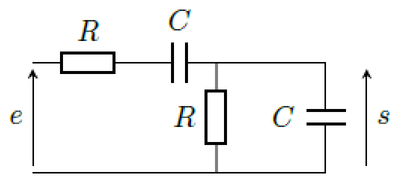
★☆☆
Ref. 0064

- ✓ *Nature d'un filtre*

Déterminer la nature des filtres suivants :



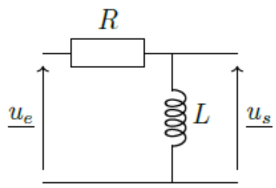




Exercice 2 : Etude du filtre RL ♥

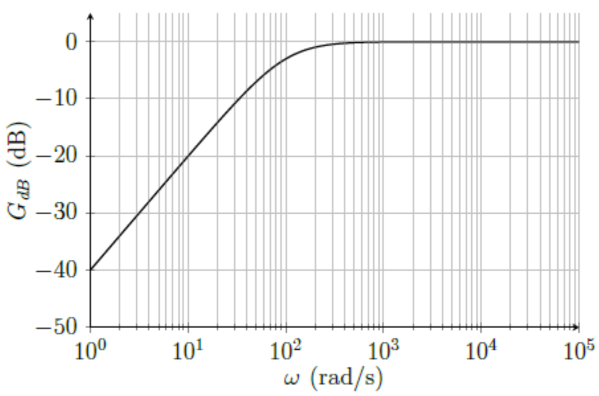
★★☆
Ref. 0065

- ✓ *Filtre d'ordre 1*
- ✓ *Fonction de transfert*
- ✓ *Pulsation de coupure*
- ✓ *Diagramme de Bode*

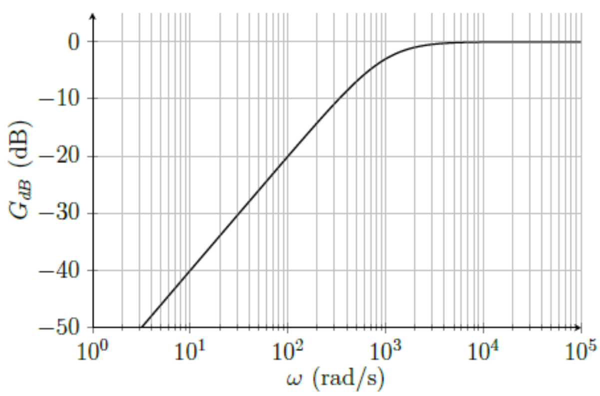


On étudie le filtre ci-dessous constitué d'une résistance R = 1kΩ et d'une bobine idéale d'inductance L.

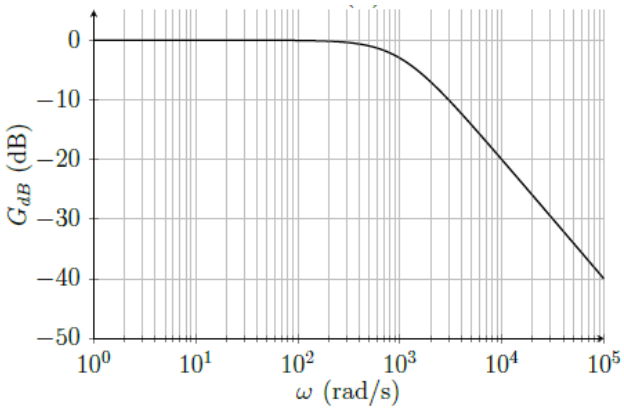
1) Déterminer la nature du filtre d'après le comportement asymptotique des dipôles.
2) Établir sa fonction de transfert. Mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On précisera les expressions et valeurs de H_0 et ω_0.
3) Établir l'expression de la pulsation de coupure du filtre.
4) Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence.
5) Trois étudiants ont tracé le diagramme de Bode en gain du circuit mais l'étudiant 1 a inversé la résistance et la bobine, l'étudiant 2 s'est trompé en choisissant R = 100 Ω. Seul l'étudiant 3 a fait les choses correctement. Associer à chaque courbe le numéro de l'étudiant en justifiant soigneusement.



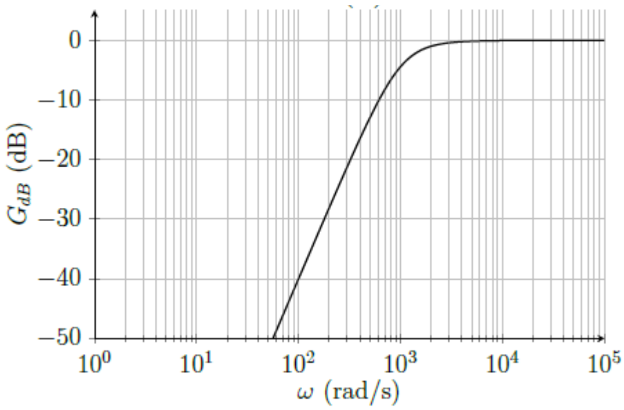
Courbe (a)



Courbe (b)



Courbe (c)



Courbe (d)

6) Déterminer la valeur de l'inductance de la bobine à l'aide du diagramme de Bode.

Exercice 3 : Etude d'un filtre RC à l'oscilloscope ♥

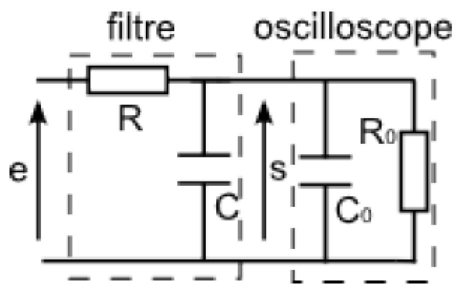
★★☆
Ref. 0066

- ✓ *Filtre d'ordre 1*
- ✓ *Fonction de transfert*
- ✓ *Pulsation de coupure*

On souhaite effectuer l'étude expérimentale d'un filtre passe-bas du premier ordre R, C.

1) Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre.
2) Calculer la fréquence de coupure du filtre à -3 dB si on utilise une résistance R = 680 kΩ et une capacité C = 47 pF.

Lors de l'étude expérimentale, on mesure la tension d'entrée et la tension de sortie du filtre à l'oscilloscope, la liaison entre le circuit et l'entrée de l'oscilloscope est assurée par un câble coaxial. On s'aperçoit que les valeurs mesurées ne correspondent pas aux résultats théoriques. Pour expliquer cet écart, on modélise l'entrée de l'oscilloscope par l'association en parallèle d'une capacité C_0 = 30 pF et d'une résistance R_0 = 1 MΩ.



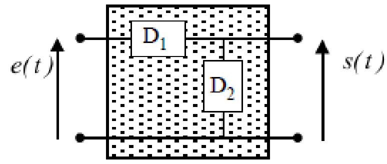
3) La nature du filtre est-elle changée ?
4) Calculer la nouvelle fonction de transfert.
5) Déduire du calcul précédent la nouvelle fréquence de coupure à -3 dB. La calculer ainsi que le gain en dB en continu G_{dB} (0) et le gain G_{dB} en dB pour cette fréquence.
6) L'expérience donne pour la fréquence précédente un gain en dB de -10,2 dB et un gain en continu de -4,5 dB. Pour expliquer l'écart observé on modélise le câble coaxial par une capacité C_c en parallèle sur l'entrée de l'oscilloscope. Calculer la valeur de cette capacité.

Exercice 4 : Modélisation d'un filtre inconnu ♥

★★☆
Ref. 0067

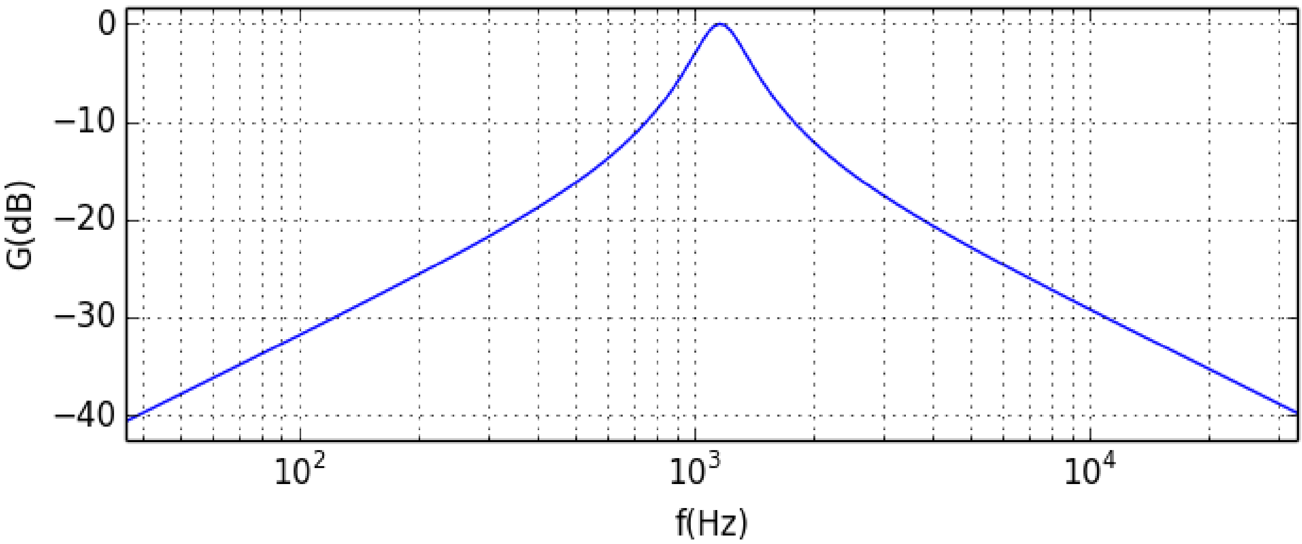
- ✓ *Filtre d'ordre 2*
- ✓ *Facteur de qualité*
- ✓ *Diagramme de Bode*

Un quadripôle est constitué de deux dipôles D_1 et D_2, disposés comme l'indique la figure ci-contre.



On sait que le constructeur a utilisé pour construire le filtre un seul résistor de résistance R, un seul condensateur de capacité C et une seule bobine d'inductance L. Ces trois dipôles ont été associés en série ou en parallèle de façon à former les dipôles D_1 et D_2.

Seules les bornes d'entrée et de sortie sont accessibles à l'expérimentateur. Ce dernier alimente le filtre par un générateur de tension sinusoïdale parfait $e(t) = E\cos(\omega t)$, et effectue une étude en fréquence de la réponse du système. Il relève le tracé expérimental fourni ci-dessous.



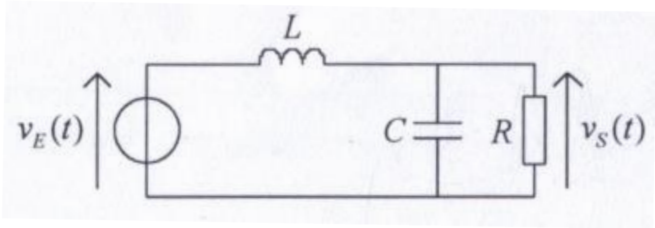
1) Quelle est la nature du filtre ?
2) Rappeler la forme canonique de la fonction de transfert d'un tel filtre en fonction de grandeurs ω_0 et Q. Que représentent-elles pour le filtre ?
3) Déterminer graphiquement leurs valeurs numériques. Expliquer votre démarche.
4) Pour avoir des informations supplémentaires sur le filtre, l'expérimentateur relie l'entrée du filtre à un générateur de tension continu de f.é.m. $U_0 = 15\ V$, la sortie étant ouverte. Il mesure alors en régime établi un courant d'entrée d'intensité I = 15 mA.
   a) Déterminer la disposition des composants dans le quadripôle. Expliquer précisément votre raisonnement.
   b) Déterminer la valeur numérique des composants.

Exercice 5 : Etude d'un filtre passe-bas du 2nd ordre ♥

★★★
Ref. 0068

- ✓ *Filtre d'ordre 2*
- ✓ *Fonction de transfert*
- ✓ *Diagramme de Bode*

On étudie le filtre suivant, la sortie étant prise aux bornes de R.



1) Déterminer la nature du filtre d'après le comportement asymptotique des dipôles.
2) Établir sa fonction de transfert.
3) On pose la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$. On précisera les expressions de H_0, Q et ω_0.
4) Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence.
5) Rappeler la condition sur Q pour observer un phénomène de résonance.
6) Tracer le diagramme de Bode en gain et en phase (on considèrera 2 cas selon la valeur de Q).

Exercice 6 : Suppression d'une composante très basse fréquence ♥

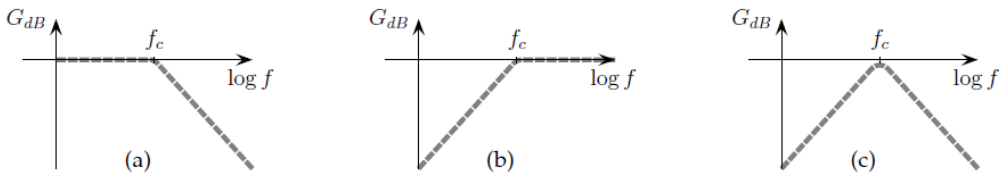
★☆☆
Ref. 0069

- ✓ *Filtrage d'un signal complexe*
- ✓ *Spectre d'un signal périodique*

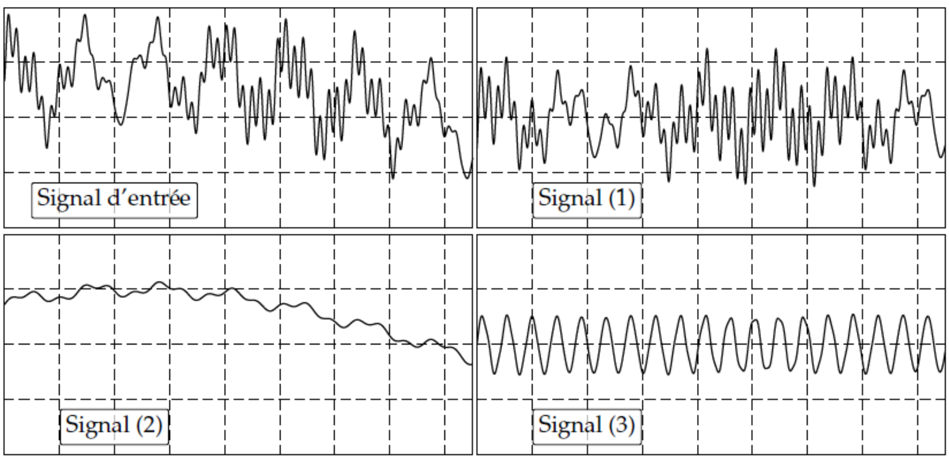
Les composants électroniques ont un comportement qui varie légèrement avec la température, ce qui fait que la plupart des appareils de mesure ont une légère composante continue, ou basse fréquence, qui ne reflète pas nécessairement le signal à étudier mais traduit la dérive due aux effets thermiques.

L'échelle de temps typique pour ces variations indésirables est de l'ordre de 50 s au moins, soit des fréquences inférieures à 0,02 Hz. Pour éliminer ce problème, on traite le signal en le faisant passer par un filtre de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 1 Hz.

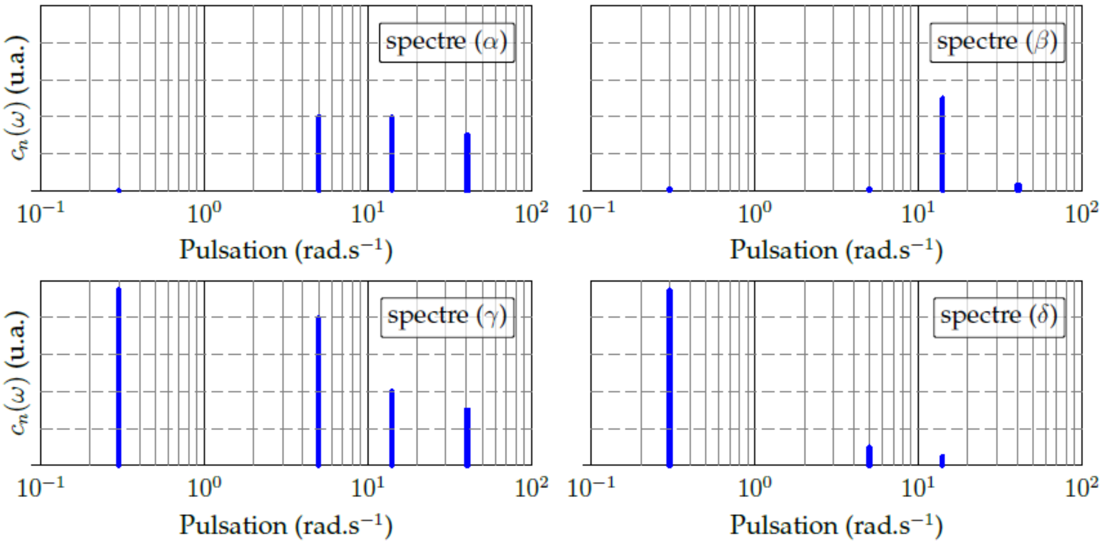
1) On propose ci-dessus le tracé asymptotique des courbes de gain en diagramme de Bode relative à trois filtres (a), (b) et (c). Lequel correspond le mieux à l'utilisation souhaitée ? Justifier.



2) On considère le signal représenté ci-dessous à gauche (signal d'entrée) appliqué en entrée des différents filtres ainsi que les trois signaux de sorties obtenus, dans le désordre.



On donne aussi les quatre spectres de pulsation correspondants à ces signaux (à nouveau dans le désordre).



Associer à chaque signal (entrée, 1, 2 et 3) le bon spectre (α, β, γ ou δ) et pour les signaux (1, 2, 3) préciser le filtre (a, b ou c) utilisé.

Exercice 7 : Filtrage d'un signal complexe ♥

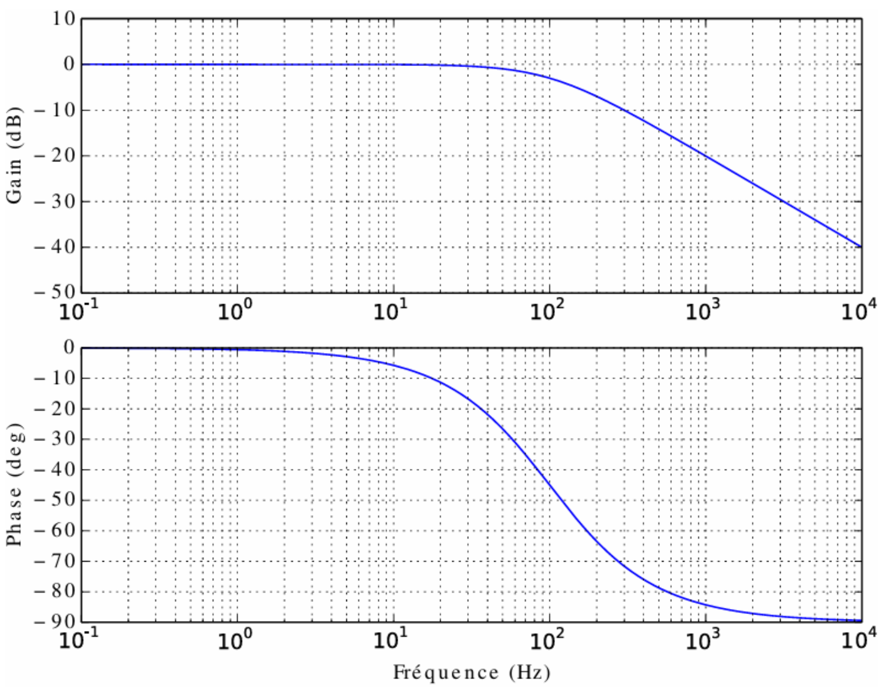
★★☆
Ref. 0070

- ✓ *Filtrage d'un signal complexe*
- ✓ *Diagramme de Bode*
- ✓ *Spectre d'un signal périodique*

On considère le signal d'entrée (en V) de fréquence f = 10 Hz :

$$e(t) \;=\; 2\,(1 + cos(\omega t) + cos(100\omega t) + cos(1000\omega t))$$

On étudie l'action d'un filtre, dont on donne le diagramme de Bode, sur $e(t)$. Déterminer le signal de sortie s(t). Conclure quant à son allure.



Exercice 8 : Détermination expérimentale des paramètres d'un filtre

★★★
Ref. 0071

- ✓ *Filtre d'ordre 2*
- ✓ *Filtrage d'un signal complexe*
- ✓ *Spectre d'un signal périodique*

On considère un filtre dont la fonction de transfert est : $\underline{H}\,(j\omega) = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $H_0 \geq 1$ et $Q \geq 1$.

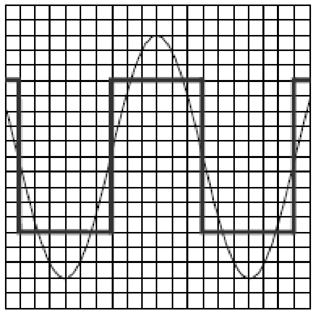
Pour déterminer les valeurs de H_0, ω_0 et Q du filtre, on étudie sa réponse à une tension d'entrée $e(t)$ en créneaux d'amplitude E pour deux périodes différentes T_1 (expérience 1) et T_2 (expérience 2). Les courbes des tensions d'entrée et de sortie sont observées à l'oscilloscope : $e(t)$ en voie I ; $s(t)$ en voie II.

On donne le développement en série de Fourier d'un créneau d'amplitude E et de période $T = 2\pi/\omega$:

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(cos(\omega t) + \frac{1}{3}\,cos(3\omega t) + \frac{1}{5}cos(5\omega t) + \cdots\right)$$

Expérience 1 :

On a une sensibilité verticale de 0,1 V par carreau en voie I (en gras) ; de 0,5 V par carreau en voie II, et une base de temps de 0,1 ms par carreau. Les zéros sont réglés au centre de l'écran.

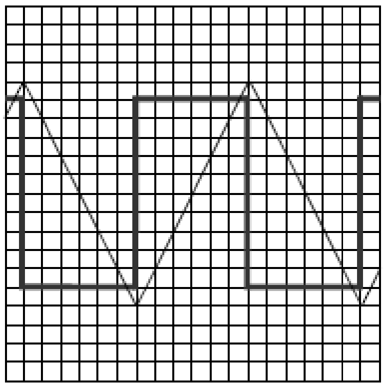


Lorsque l'on augmente ou diminue légèrement la pulsation de $e(t)$, on constate que l'amplitude de $s(t)$ diminue.

1) Expliquer la forme de la courbe observée. En déduire la valeur de ω_0.
2) Exprimer H_0 en fonction de E et S l'amplitude de $s(t)$. Déterminer sa valeur numérique.

Expérience 2 :

On a une sensibilité verticale de 0,1 V par carreau en voie I (en gras) ; de 0,04 V par carreau en voie II, et une base de temps de 10 μs par carreau. Les zéros sont réglés au centre de l'écran.



3) D'après la forme du signal de sortie, dans quel domaine de pulsations ω_2 se trouve-t-elle ?
4) Vérifier l'affirmation précédente en mesurant en rad.s^{-1} la valeur de la pulsation ω_2.
5) Déterminer la relation approchée vérifiée par les signaux $e\,(t)$ et $s\,(t)$.
6) En déduire la relation entre la pente p du signal de sortie et E, H_0, ω_0, Q. En déduire la valeur numérique de Q.