Correction TD5

Vrai / Faux

1. faux ($E_e = \frac{1}{2} C u^2$ est forcément continue donc u continue)

2. vrai (la solution homogène est de la forme $A\exp(-t/\tau) \to 0$ qd $t \to \infty$)

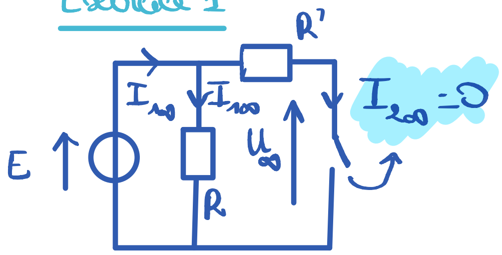
3. vrai, c'est i qui doit être continu car $E_m = \frac{1}{2} L i^2$ continue

4. la durée du régime transitoire $\simeq 5\tau$ ($\Leftrightarrow$ 99% de l'évolution)

5. vrai

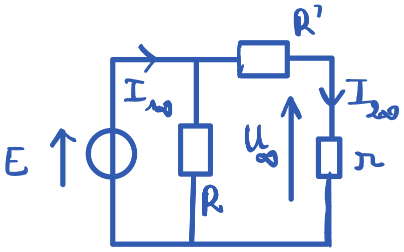
6. vrai

Exercice 1



$E = R I_{1\infty}$ $\quad \boxed{I_{1\infty} = \frac{E}{R}}$

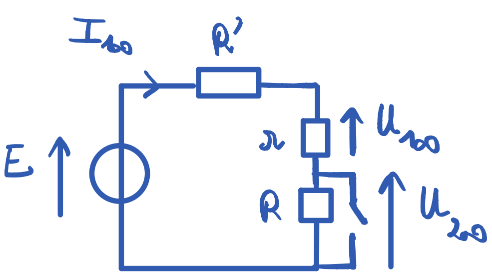
$E = \underbrace{R' I_{2\infty}}_{0} + u_\infty \Rightarrow \boxed{u_\infty = E}$



$(R'+r) /\!/ R$: $R_{eq} = \frac{(R'+r)R}{R'+R+r}$

$\boxed{I_{1\infty} = \frac{E}{R_{eq}}}$

pont diviseur de tension : $\boxed{u_\infty = E\frac{r}{R'+r}}$ $\quad \boxed{I_{2\infty} = \frac{E}{R'+r}}$



$\boxed{I_{1\infty} = \frac{E}{R'+r+R}}$ $\quad \boxed{u_{1\infty} = E\frac{r}{R'+r+R}}$

$\boxed{u_{2\infty} = E\frac{R}{R'+r+R}}$

Exercice 2

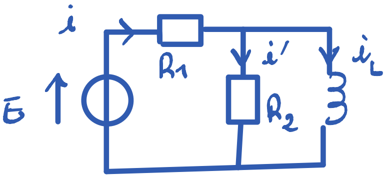
1) u aux bornes d'un condensateur donc u continue : $u(0^+) = u(0^-) = 0$

$u = R i_2 \rightarrow i_2(0^+) = 0$

$E = u_R + u \qquad u_R(0^+) = E \qquad i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{R}$

2) i_L traversant la bobine est continue : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$

$\rightarrow i(0^+) = i'(0^+)$

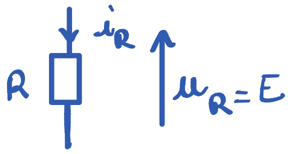


$E = R_1 i + R_2 i'$ à $t = 0^+$ $E = (R_1 + R_2) i(0^+)$

$i(0^+) = \frac{E}{R_1 + R_2}$

Exercice 3

1) K fermé $u_R(t) = E \qquad i_R(t) = \frac{E}{R}$



$E = r i_L + u_L \qquad u_L = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{r}{L} i_L = \frac{E}{L}}$

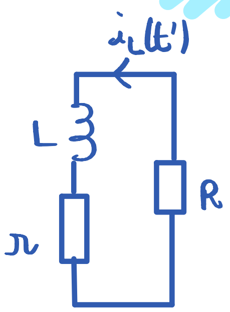
$i_{L_H}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{L}{r}$

$i_{L_p} = \frac{E}{r}$

$i_L(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{r} \qquad i_L(0) = 0$ par continuité $\quad A = -\frac{E}{r}$

$i_L(t) = \frac{E}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

2)



$u_L + (R + r) i_L = 0 \qquad u_L = L \frac{di_L}{dt'}$

$i_L(t)$ quand $t \to \infty$

$\downarrow$

$\frac{di_L}{dt'} + \frac{R + r}{L} i_L = 0$

$i_L(t') = A \exp\left(-\frac{t'}{\tau'}\right) \qquad i_L(0) = \frac{E}{r} = A$

$i_L(t') = \frac{E}{r} \exp\left(-\frac{t'}{\tau'}\right)$

avec $\tau' = \frac{L}{R + r}$

3) i_L est maximale quand $t'=0$ $\quad i_{L_{max}} = \frac{E}{r} \rightarrow u_{R_{max}} = R\frac{E}{r}$

4) Bilan énergétique dans les résistances :

- $\underline{\text{1ère méthode}}$: calcul direct $\Delta E_J = \int_0^\infty (R+r)\, i_L(t')^2\, dt'$

$$\Delta E_J = (R+r)\times\left(\frac{E}{r}\right)^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{\tau'}\right)dt = (R+r)\frac{E^2}{r^2}\left(-\frac{\tau'}{2}\right)\underbrace{\left[\exp\left(-\frac{2t}{\tau'}\right)\right]_0^\infty}_{0-1}$$

$$\Delta E_J = \cancel{(R+r)}\,\frac{E^2}{r^2}\,\frac{L}{2\cancel{(R+r)}} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{r}\right)^2$$

- $\underline{\text{2° méthode}}$: bilan énergétique dans le circuit

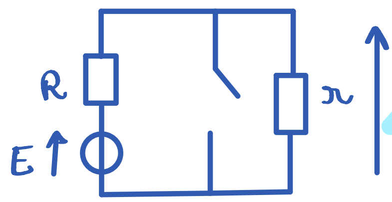
L'énergie dissipée dans les résistances est égale à l'énergie délivrée par la bobine : $\Delta E_m = \underbrace{\frac{1}{2}L\, i_L^2(\infty)}_{0} - \frac{1}{2}L\, i_L^2(0)$

$$\Delta E_J = -\Delta E_m = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{r}\right)^2$$

La 2° méthode est beaucoup plus rapide !

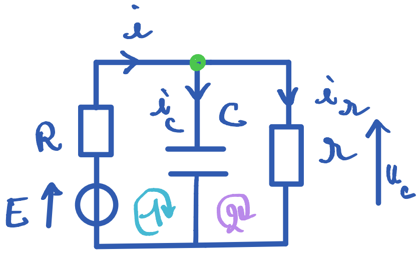
Exercice 4

1) Circuit équivalent :



$u_{c_\infty} = E\,\frac{r}{R+r}$ (pont diviseur de tension)

2)



Loi des mailles (1) : $E = Ri + u_c$

Loi des mailles (2) : $u_c = R\, i_r$

Loi des nœuds : $i = i_c + i_r$

Relation du condensateur : $i_c = C\,\frac{du_c}{dt}$

$i = C\,\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{r}$

On injecte l'expression de i dans (1) :

$$E = RC\frac{du_c}{dt} + \frac{R}{r}u_c + u_c$$

$$E = RC\frac{du_c}{dt} + \underbrace{\left(1+\frac{R}{r}\right)}_{\frac{R+r}{r}}u_c$$

<u>Forme canonique</u> : $\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{R+r}{rRC}u_c = \frac{E}{RC}}$

On identifie $\boxed{\tau = \frac{rRC}{R+r}}$

3) <u>solution homogène</u> : $u_{c_H}(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

<u>solution particulière</u> : $u_{cp} = Cte = E\frac{r}{R+r}$ (on retrouve $U_{c\infty}$)

<u>CI</u> : $u_c(0^-) = 0$ car C est déchargé, u_c continue donc $u_c(0^+) = 0$

$$u_c(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + \frac{Er}{R+r} \qquad A = -\frac{Er}{R+r}$$

$$\boxed{u_c(t) = \frac{Er}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

Exercice 5

1) $i(0^-) = 0$ $\quad s(0^-) = \frac{R}{2} i_2(0^-) = 0$ car aucun courant dans le circuit avant fermeture de K.

<u>Grandeurs continues</u> : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$

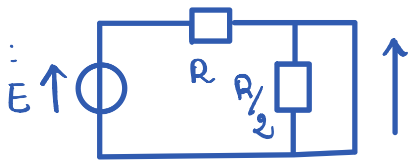
<u>Après fermeture de K</u> $\quad i = i_2 + i_L \quad$ $i(0^+) = i_2(0^+)$ à $t = 0^+$

$E = Ri + \frac{R}{2} i_2 \qquad E = \left(R + \frac{R}{2}\right) i(0^+)$ à $t = 0^+$

$i(0^+) = \frac{2E}{3R}$

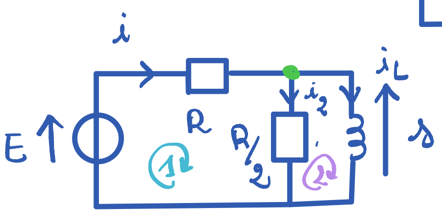
$E = Ri + s \qquad s = E - Ri \qquad s(0^+) = \frac{E}{3}$

2) <u>Circuit équivalent</u> :



$s_\infty = 0$ (fil)

3)



loi des mailles (1) : $E = Ri + s$

loi des mailles (2) : $\frac{R}{2} i_2 = s$

loi des noeuds (3) : $i = i_2 + i_L$

<u>Relation de la bobine</u> : $s = L \frac{di_L}{dt}$

(1) et (3) : $E = Ri_2 + Ri_L + s \quad$ or d'après (2) $i_2 = \frac{2s}{R}$

$E = 3s + Ri_L$ le lien entre s et i_L fait intervenir $\frac{di_L}{dt}$

il faut dériver l'équation obtenue

$3\frac{ds}{dt} + R\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad 3\frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s = 0$

$\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L} s = 0 \qquad$ On peut poser $\tau = \frac{3L}{R}$

Rq : on a trouvé $s_\infty = 0$, il faut donc une équation différentielle sans 2nd membre, cela peut donner l'idée de dériver la loi des mailles.

4) <u>Solution homogène</u> : $s_H(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

2^{nd} membre $= 0 \implies s(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ $\quad s(0) = \frac{E}{3}$

$$s(t) = \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Exercice 6

1) <u>Loi des mailles</u> : $u_1 + u_2 + Ri = 0$

<u>Relations des condensateurs</u> : $i = C \frac{du_1}{dt} = C \frac{du_2}{dt}$

pour remplacer i

pour faire le lien entre u_1 et u_2

on intègre $\quad \cancel{C} \frac{du_1}{dt} = \cancel{C} \frac{du_2}{dt}$:

$u_1 = u_2 + Cte$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} CI : u_1(0) = U_0 \\ u_2(0) = 0 \end{array}\right\} Cte = U_0$

$$u_1 = u_2 + U_0$$

$u_1 + u_1 - U_0 + RC \frac{du_1}{dt} = 0 \qquad \frac{du_1}{dt} + \frac{2}{RC} u_1 = \frac{U_0}{RC}$

On peut poser $\tau = \frac{RC}{2}$

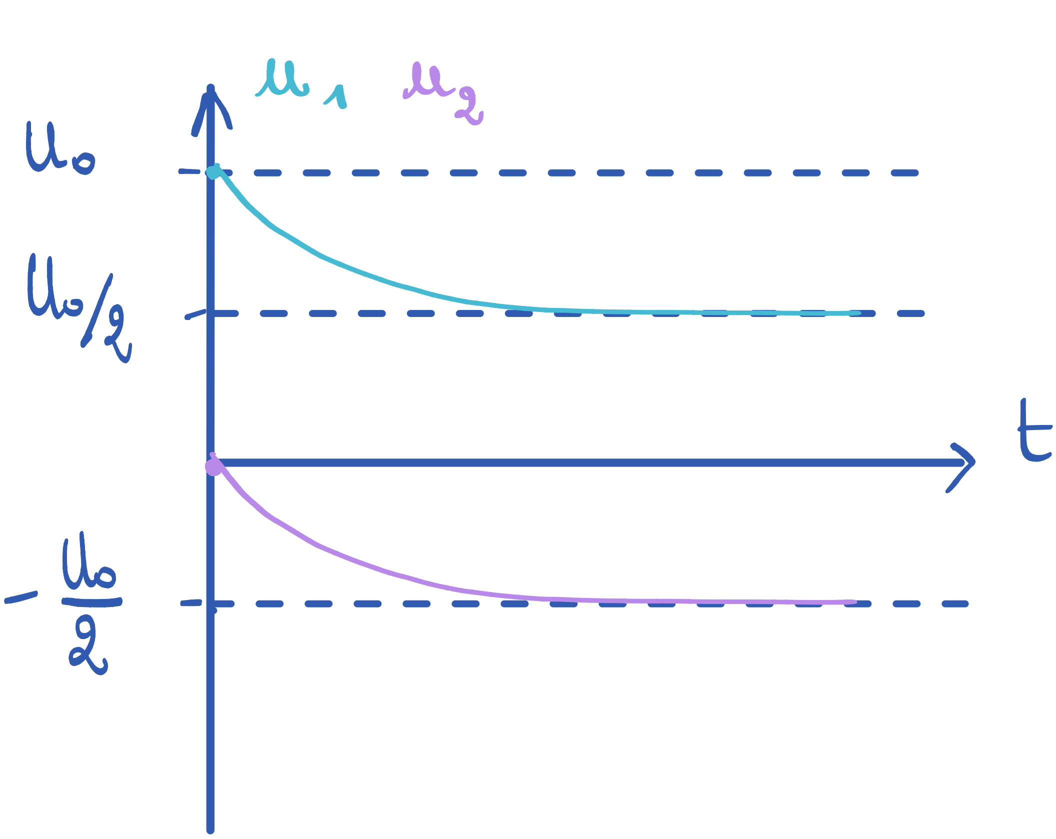
2) $u_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{U_0}{2} \qquad u_1(0) = 0 \implies A = \frac{U_0}{2}$

$$u_1(t) = \frac{U_0}{2}\left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

3) $u_2 = u_1 - U_0$

$$u_2(t) = -\frac{U_0}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

4)



5) <u>Bilan de puissance</u> (algébriquement reçue car convention récepteur)

" $i \times$ loi des mailles " $\Rightarrow$ $u_1 i + u_2 i + u_R i = 0$ } on intègre entre $t=0$ et $t \to \infty$

<u>Bilan d'énergie</u> : $\Delta E_1 + \Delta E_J + \Delta E_2 = 0$

dissipé par effet Joule

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} C u_{1\infty}^2 - \frac{1}{2} C u_1(0)^2 < 0$$

C_1 fournit de l'énergie

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} C u_{2\infty}^2 - \underbrace{\frac{1}{2} C u_2(0)^2}_{0} > 0$$

C_2 reçoit de l'énergie

donc R : $$\Delta E_J = \underbrace{\frac{1}{2} C U_0^2 - \frac{1}{2} C \left(\frac{U_0}{2}\right)^2}_{\text{énergie délivrée par } C_1} - \underbrace{\frac{1}{2} C \left(\frac{U_0}{2}\right)^2}_{\text{énergie stockée par } C_2}$$

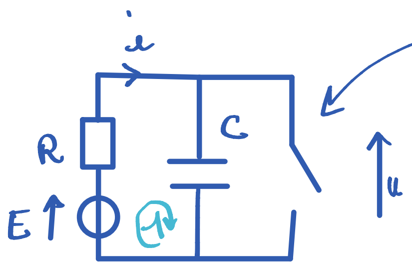
$$\Delta E_J = \frac{1}{4} C U_0^2$$

Autre méthode : $\Delta E_J = \int_0^{\infty} u_R \, i \, dt = \int_0^{\infty} R i^2 \, dt$ avec $i = C \frac{du_1}{dt}$

Plus calculatoire...

Exercice 7

1)



néon éteint

Loi des mailles (1) : $E = Ri + u$

Relation du condensateur : $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

On injecte l'expression de i dans (1) :

$$E = RC \frac{du}{dt} + u \Rightarrow E = RC \frac{du}{dt} + u$$

Forme canonique : $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u = \frac{E}{RC}$

On identifie $\tau = RC$

solution homogène : $u_H(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

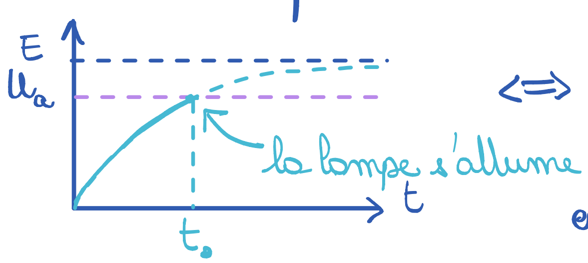
solution particulière : $u_p = Cte = E$

CI : $u(0^-) = 0$ car C est déchargé, u continue donc $u(0^+) = 0$

$u(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$ $\qquad A = -E$

$$u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

2) la lampe s'allume si $U_a < E$ à 1 date t_0 telle que $u(t_0) = U_a$

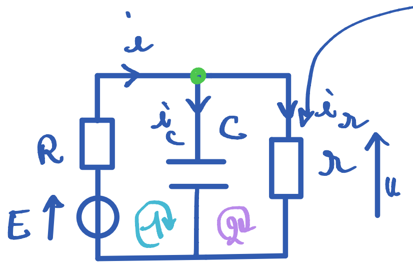


$\iff E\left(1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right)\right) = U_a$

$\exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = 1 - \frac{U_a}{E}$

$$t_0 = -\tau \ln\left(1 - \frac{U_a}{E}\right)$$

3)



néon allumé

Loi des mailles (1) : $E = Ri + u$

Loi des mailles (2) : $u = r i_r$

Loi des noeuds : $i = i_c + i_r$

Relation du condensateur : $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{r}$

On injecte l'expression de i dans (1) :

$$E = RC\frac{du}{dt} + \frac{R}{r}u + u$$

$$E = RC\frac{du}{dt} \quad \underbrace{\left(1+\frac{R}{r}\right)}_{\frac{R+r}{r}} u$$

Forme canonique : $\frac{du}{dt} + \frac{R+r}{rRC}u = \frac{E}{RC}$

On identifie $\tau' = \frac{rRC}{R+r}$

solution homogène : $u_H(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$

solution particulière : $u_p = Cte = E\frac{r}{R+r}$

CI : $u(t_0) = U_a$

$$A\exp\left(-\frac{t_0}{\tau'}\right) + E\frac{r}{R+r} = U_a \qquad A = \exp\left(\frac{t_0}{\tau'}\right)\left(U_a - E\frac{r}{R+r}\right)$$

$$u(t) = \left(U_a - E\frac{r}{R+r}\right)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau'}\right) + \frac{Er}{R+r}$$

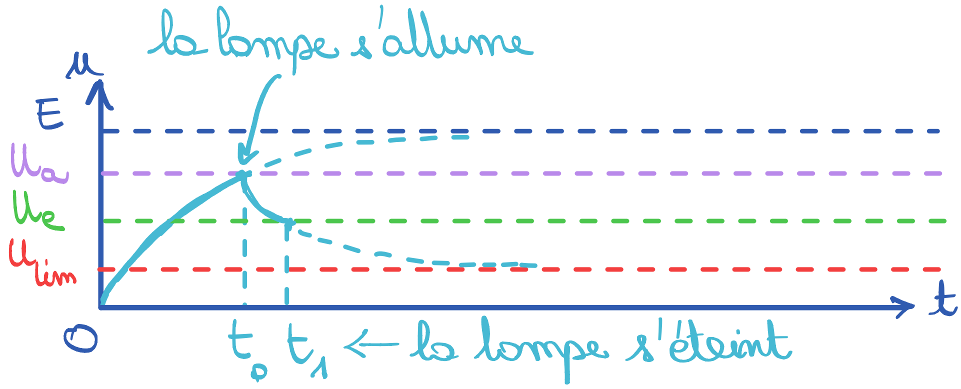
4) On pose $U_{lim} = \frac{Er}{R+r}$ ($\leftarrow$ cette valeur correspond à u quand $t \to \infty$)

$U_a > U_e \Rightarrow$ pour que la lampe s'éteigne après s'être allumée, $u(t)$ doit décroître jusqu'à U_e. Or, $\lim_{t\to\infty}(u(t)) = U_{lim}$

donc il faut $U_e > U_{lim}$.

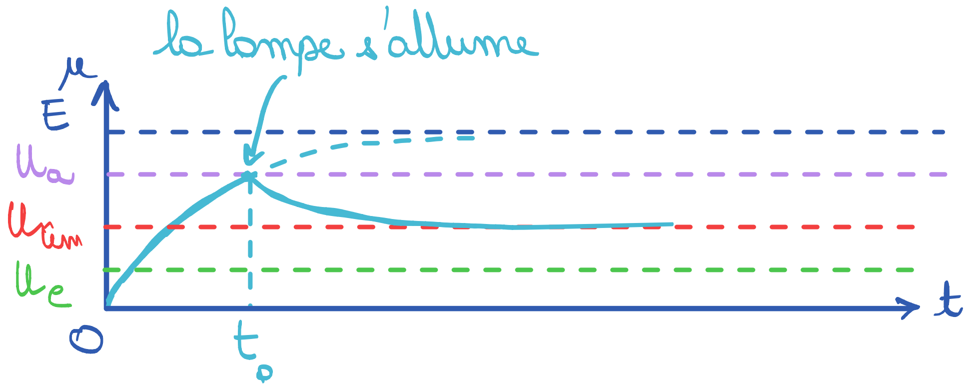
1er cas : $U_e > U_{lim}$

la lampe s'allume puis s'éteint dès que $u = U_e$ (à t_1)



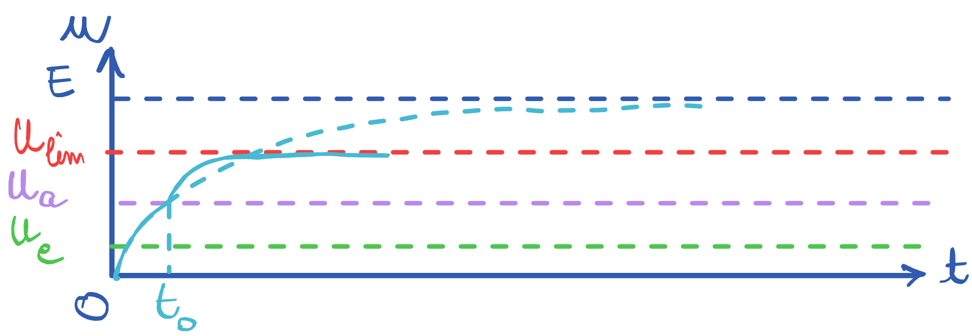
2° cas : $U_a > U_{lim} > U_e$

la lampe reste allumée pour $t \geq t_0$



3° cas : $U_{lim} \geq U_a$

la lampe reste allumée pour $t \geq t_0$

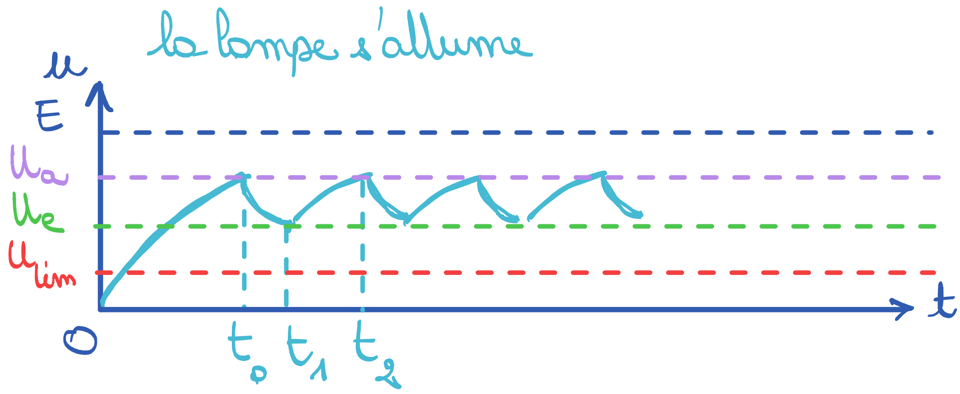


5) On s'intéresse au 1er cas : la date t_1 est telle que

$$\left(U_a - E\frac{r}{R+r}\right)\exp\left(-\frac{t_1-t_0}{\tau'}\right) + \frac{Er}{R+r} = U_e$$

$$\exp\left(-\frac{t_1-t_0}{\tau'}\right) = \frac{U_e-U_{lim}}{U_a-U_{lim}} \qquad t_1 = \tau' \ln\frac{U_a-U_{lim}}{U_e-U_{lim}} + t_0$$

6) Après la 1ère extinction à $t = t_1$, le circuit redevient 1 simple circuit RC comme à la question 1 : C se charge $u(t)$ augmente jusqu'à U_a. S'ensuit une nouvelle décharge jusqu'à U_e et etc...



<u>Période des oscillations :</u> $T = t_2 - t_0$

Pour $t_1 \leq t \leq t_2$: $u(t) = (U_e - E)\exp\left(-\dfrac{t - t_1}{\tau}\right) + E$

$$(U_e - E)\exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right) + E = U_a$$

$$t_2 = t_1 + \tau \ln \frac{U_e - E}{U_a - E}$$

$$T = \tau' \ln \frac{U_a - U_{lim}}{U_e - U_{lim}} + t_0 + \tau \ln \frac{U_e - E}{U_a - E} - t_0$$

$$\boxed{T = RC\left(\frac{r}{R + r}\ln \frac{U_a - U_{lim}}{U_e - U_{lim}} + \ln \frac{U_e - E}{U_a - E}\right)}$$