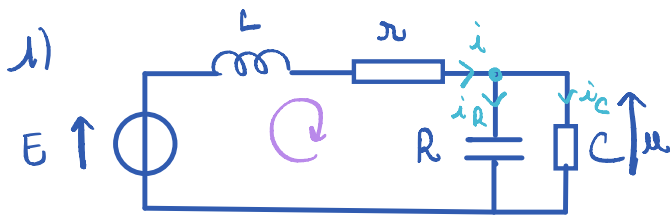


Mise en série d'une bobine et d'un condensateur réel



(1) loi des mailles: $E = L \frac{di}{dt} + r i + u$

(2) loi d'Ohm: $u = R i_R$

(3) loi des nœuds: $i = i_R + i_C$

(4) condensateur: $i_C = C \frac{du}{dt}$

$\rightarrow E = L \frac{di}{dt} + r i + R(i - i_C) = L \frac{di}{dt} + (R + r) i - RC \frac{du}{dt} ?$

On dérive (1) $L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} = 0 \rightarrow \frac{du}{dt} = -L \frac{d^2 i}{dt^2} - r \frac{di}{dt}$

$L \frac{di}{dt} + (R + r) i + RLC \frac{d^2 i}{dt^2} + rRC \frac{di}{dt} = E$

$\frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right)}_{\frac{2}{G}} \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{R+r}{RLC}}_{\left(\frac{R}{r} + 1 \right) \frac{1}{G^2}} i = \frac{E}{RLC}$

$G = \frac{L}{r} = RC$
 $L G^2 = \frac{RLC}{r}$

2) $\Delta = \frac{4}{G^2} - 4 \left(1 + \frac{R}{r} \right) \frac{1}{G^2} = -\frac{4R}{rG^2} < 0 \rightarrow$ régime pseudo-périodique

$X_1 = \frac{-\frac{2}{G} \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2}$

$\Omega = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{R}{r}}$

solution particulière et i_{ss}

$i(t) = \exp\left(-\frac{t}{G}\right) (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + \frac{E}{R+r}$

CE: • continuité de i imposée par la bobine: $i(0^+) = i(0^-) = 0$

• $\frac{di}{dt} = \frac{E - u - r i}{L}$

continuité de u imposée par le condensateur:

$u(0^+) = u(0^-) = 0$

$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$

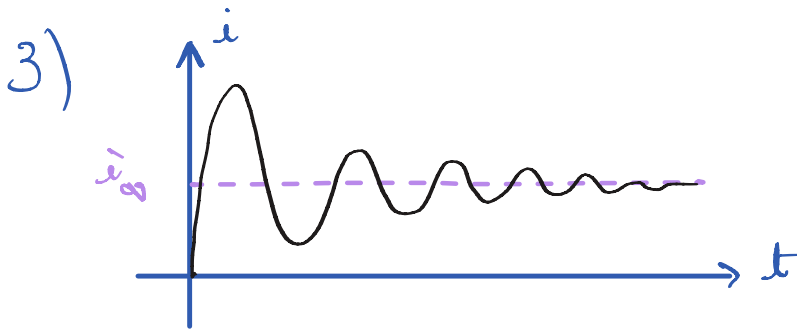
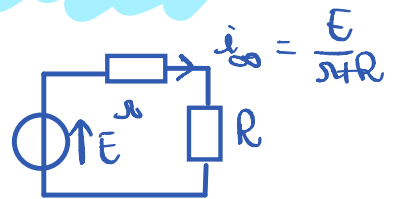
$$i(0) = 0 \Leftrightarrow A + \frac{E}{R+r} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R+r}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} \Leftrightarrow -\frac{A}{\tau} + B\Omega = \frac{E}{L} \Rightarrow B = \frac{E}{\Omega} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{(R+r)\tau} \right) = \frac{E}{\Omega \tau} \frac{R}{R+r}$$

$$i(t) = \frac{E}{R+r} \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left(-\cos(\Omega t) + \sqrt{\frac{R}{r}} \sin(\Omega t) \right) + 1 \right)$$

$$i_{\infty} = \frac{E}{R+r}$$

circuit équivalent en régime permanent
cohérent



4) si $r \rightarrow 0$ $R = \frac{L}{rC} \rightarrow \infty$: on se ramène au cas d'une bobine et

d'un condensateur idéal. On s'attend à trouver 1 OHNA (avec $i_{\infty} = 0$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow 1$$

$$\frac{E}{R+r} \rightarrow \frac{E}{R}$$

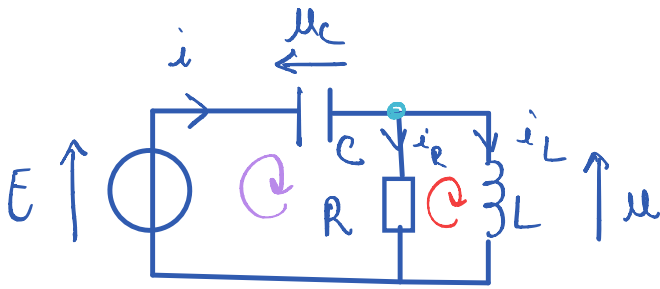
$\frac{R}{r}$ très grand le terme en sinus l'emporte sur celui en cosinus et 1.

$$i(t) \approx E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\tau^2}{LC} \rightarrow \sqrt{\frac{R}{r}} \times \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Etude d'un circuit à 2 mailles



1) (1) loi des mailles $E = u_C + u$

(2) loi des nœuds $i = i_R + i_L$

(3) condensateur $i = C \frac{du_C}{dt}$

(4) bobine $u_L = L \frac{di_L}{dt}$

(5) loi des mailles
loi d'ohm $u = R i_R$

On dérive (1) $\frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} + \frac{i_L}{C} = 0$

On redérive : $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \frac{di_L}{dt} = 0$

$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{1}{RC} \dot{u} + \frac{1}{LC} u = 0$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

2) $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2$ $\omega_0 > 1/2\tau \Rightarrow \Delta < 0$

régime pseudo-périodique

$$X_1 = \frac{-\frac{1}{2C} \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2} = -\frac{1}{2C} \pm j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{L\omega^2 - \frac{1}{C^2}}$
 Ω pseudo pulsation

$$u(t) = \exp\left(-\frac{t}{2C}\right) (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

CE: $u(0) = 0$ (continuité de u aux bornes de C)

$i_L(0) = 0$ (" " " " i_L traversant la bobine)

• loi des mailles à $t=0 \Rightarrow u(0) = E \Rightarrow \underline{A = E}$

• $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} - \frac{i_L}{C} = -\frac{E}{RC}$ à $t=0$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{2C} A + B\Omega = -\frac{E}{RC} \quad B = \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{E}{C} + \frac{E}{2C} \right) = \underline{\underline{-\frac{E}{2\Omega C}}}$$

$$u(t) = E \exp\left(-\frac{t}{2C}\right) \left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{2\Omega C} \sin(\Omega t) \right)$$