Correction TD6

Exercice 1

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) + 2$$

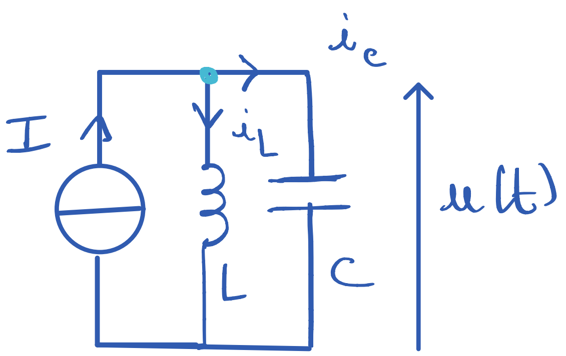
- amplitude $x_m = 4$
- féquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02} = 50\,Hz$
- $x(0) = 2 = 4\cos\varphi + 2 \iff \cos\varphi = 0$

2 solutions dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

or $\frac{dx}{dt}(0) = -\omega x_m \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

1)



(1) $I = i_R + i_L$ (2) $i_c = C\frac{du}{dt}$

(3) $u = L\frac{di_L}{dt}$

On dérive (1) : $\frac{di_c}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0$ $\underbrace{C\ddot{u}}_{(2)} + \underbrace{\frac{u}{L}}_{(3)} = 0$

$$\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

2) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

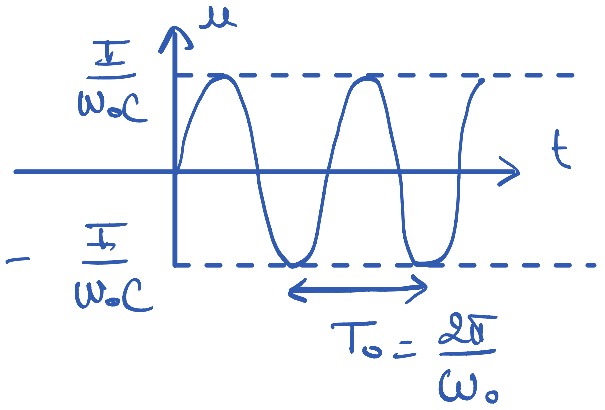
3) $u(0^-) = u(0^+) = 0 \Rightarrow u(0) = 0$

4) $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ $i_c(0) = I - i_L(0) = I$ $\frac{du_c}{dt}(0) = \frac{I}{C}$

5) $u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$u(0) = A = 0$

$\frac{du}{dt}(0) = B\omega_0 = \frac{I}{C}$ $\quad B = \frac{I}{\omega_0 C}$ $\Bigg\}$ $u(t) = \frac{I}{\omega_0 C}\sin(\omega_0 t)$



6) Calcul de $E_e(t)+E_m(t)$ $\quad E_e(t) = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}C\frac{I^2}{\omega_0^2C^2}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}LI^2\sin^2(\omega_0 t)$ $\quad =L$

$E_m = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L(I-i_c)^2 = \frac{1}{2}L\left(I - C\frac{du_c}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}L\left(I - I\cos(\omega_0 t)\right)^2 = \frac{1}{2}LI^2\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)^2$

$E_{em} = \frac{1}{2}LI^2\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LI^2 - LI^2\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LI^2\cos^2(\omega_0 t)$

$E_{em} = LI^2\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)$

Exercice 3 :

1) Régime pseudopériodique (oscillations harmoniques amorties)

2) $T = 2{,}3$ ms $\quad$ durée totale $\simeq 1{,}6$ s

3) durée totale $\gg T \Rightarrow Q$ très grand

4) Si Q est très grand $\Omega \simeq \omega_0$ $\quad \omega_0 \simeq \frac{2\pi}{T} = 2{,}7\times10^3$ rad.s^{-1}

5) Méthode de la tangente à l'origine ; $\tau \simeq 0{,}5$ s $\Big\}$ difficile d'être précis

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0\tau}{2} = 7\times10^2$

ou Durée totale $\simeq Q\times T$ $\quad Q = 7\times10^2$

Exercice 4 :

1) $u + Ri + u_L = 0 \qquad i = C\dfrac{du}{dt} \qquad u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$\rightarrow \ddot{u} + \dfrac{R}{L}\dot{u} + \dfrac{1}{LC}u = 0$ en posant $\dfrac{R}{L} = \dfrac{\omega_0}{Q}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

on obtient $\ddot{u} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$

- $\Delta > 0$: $Q < 1/2$ régime apériodique
- $\Delta < 0$: $Q > 1/2$ régime pseudo-périodique
- $\Delta = 0$: $Q = 1/2$ régime apériodique critique

2) $Q > 1/2$: solutions de l'équation caractéristique

$$X_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{|\Delta|}}{2} \qquad X_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

- Partie réelle : $-\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\dfrac{1}{\tau}$ $\qquad \tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$
- Partie imaginaire : $\Omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} \Rightarrow \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

pseudo-pulsation

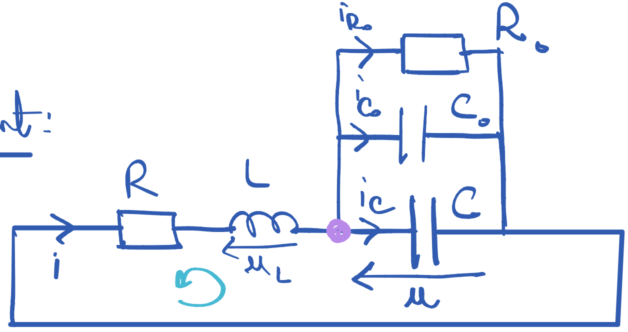
3) $u(t) = \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

- $u(0^-) = u(0^+) = u_0 \qquad u(0) = A = u_0$
- $i(0^-) = i(0^+) = 0$ (K ouvert et continuité de i) or $i = C\dfrac{du}{dt}$

$\dfrac{du}{dt}(0) = 0 = -\dfrac{1}{\tau}A + B\Omega \qquad B = \dfrac{A}{\Omega\tau} = \dfrac{u_0}{\Omega\tau}$

$$u(t) = u_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

4) Circuit équivalent:



a)

(1) $u + Ri + u_L = 0$ (3) $u_L = L\frac{di}{dt}$ (5) $i_{C_0} = C_0\frac{du}{dt}$

(2) $i = i_C + i_{C_0} + i_{R_0}$ (4) $i_C = C\frac{du}{dt}$ (6) $u = R_0\, i_{R_0}$

$i = (C + C_0)\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0}$ donc (3) $\Rightarrow u_L = L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R_0}\frac{du}{dt}$

Dans (1) : $u + R(C+C_0)\dot{u} + \frac{R}{R_0}u + L(C+C_0)\ddot{u} + \frac{L}{R_0}\dot{u} = 0$

$$L(C+C_0)\ddot{u} + \left(R(C+C_0) + \frac{L}{R_0}\right)\dot{u} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

b) $L(C+C_0) \simeq LC$ si $C_0 \ll C$ C : qq nF en TP $\Rightarrow$ OK
ou µF

$1 + \frac{R}{R_0} \simeq 1$ si $R_0 \gg R$ R : qq kΩ en TP $\rightarrow$ OK

$R(C+C_0) + \frac{L}{R_0} \simeq RC$ si $C \gg C_0$ et $RC \gg \frac{L}{R_0}$ soit $L \ll \underset{10^3\ 10^{-6}\ 10^6}{RCR_0} \simeq 10^3$ H

< qq mH en TP ou H OK

5) Si $Q \gg 1$: $\Omega \simeq \omega_0$ et $\Omega\tau = \omega_0\tau \gg 1$

$u(t) \simeq U_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cos(\omega_0 t)$

$E_e(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2 \Rightarrow E_e(t) \simeq \frac{1}{2}CU_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\cos^2(\omega_0 t)$

$i(t) = C\frac{du}{dt} \simeq CU_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(-\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{1}{\Omega\tau}\omega_0 \cos(\omega_0 t)}\right)$

$i(t) \simeq -CU_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ négligeable

$E_m(t) = \frac{1}{2}L\, i(t)^2 \Rightarrow E_m(t) = \frac{1}{2}LC^2U_0^2\omega_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\sin^2(\omega_0 t)$

$$E_m(t) \simeq \frac{1}{2}\underbrace{L C^2 U_0^2 \omega_0^2}_{} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \sin^2(\omega_0 t) \simeq \frac{1}{2} C U_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \sin^2(\omega_0 t)$$

$$L C^2 U_0^2 \frac{1}{LC} = U_0^2 C$$

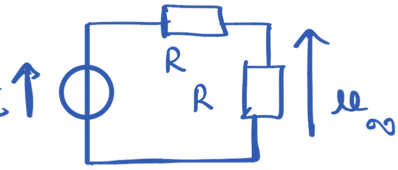
Energie totale : $$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2} C U_0^2}_{\text{énergie initiale}} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

$$\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} \simeq \frac{\exp(-2t/\tau) - \exp(-2(t+T)/\tau)}{\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)} = 1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right) \underset{\text{DL au 1er ordre}}{\simeq} \frac{2T}{\tau} \simeq \frac{\omega_0 T}{Q} \qquad \omega_0 T \simeq 2\pi \qquad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\boxed{\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} \simeq \frac{2\pi}{Q}}$$

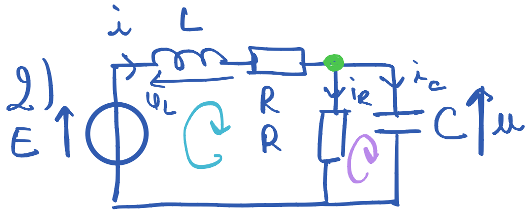
Exercice 5 :

1) Circuit équivalent :



le 2R sont en série $\Rightarrow u_\infty = \frac{E}{2}$

2)



(1) $E = u_L + R\,i + u$

(3) $i = i_R + i_C$

(2) $u = R\,i_R$

(4) $u_L = L\frac{di}{dt}$

(5) $i_C = C\frac{du}{dt}$

(3), (1) et (4) : $$E = L\left(\frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt}\right) + R\,(i_R + i_C) + u \qquad i_R = \frac{u}{R}$$

$$E = \frac{L}{R}\dot{u} + LC\ddot{u} + u + RC\dot{u} + u$$

$$\ddot{u} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\dot{u} + \frac{2}{LC}u = \frac{E}{LC}$$

Rq: on retrouve bien $u_\infty = \frac{E}{2}$

On identifie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ et $Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}} = \frac{\omega_0 R C L}{L + R^2 C}$

$$Q = \frac{R\sqrt{2LC}}{L + R^2 C}$$

3) Le régime est pseudo-périodique donc $Q > 1/2$.

$$Q = \frac{R\sqrt{2LC}}{L+R^2C} > \frac{1}{2} \iff 2R\sqrt{2LC} > L+R^2C$$

4) solutions de l'équation caractéristique : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$ $\quad \Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

$$X_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

5) $u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + \frac{E}{2}$

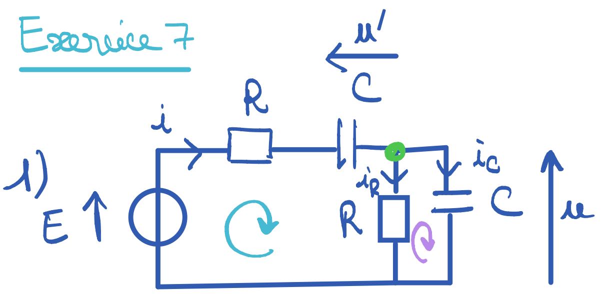
6) $\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+T)-u_\infty} = 4$ (graphiquement, en considérant les 2 premiers maximas)

en théorie $\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+T)-u_\infty} = \frac{\exp\left(-\omega_0 t/2Q\right)}{\exp\left(-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}\right)} = \exp\left(\frac{\omega_0 T}{2Q}\right)$ les parties sinusoïdales étant égales à t et $t+T$ (cf TP8)

$\omega_0 \frac{T}{2Q} = \ln 4$ $\qquad Q = \frac{T\omega_0}{2\ln 4}$

Exercice 7

1)



(1) $E = Ri + u' + u$

(2) $u = Ri_R$

(3) $i = i_R + i_C$

(4) $i = C\frac{du'}{dt}$

(5) $i_C = C\frac{du}{dt}$

(5),(2) dans (1) : $E = R\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + u' + u$

il faut remplacer u'

$$\boxed{\frac{du'}{dt} = \frac{i}{C}} = \frac{1}{C}\boxed{\left(\boxed{\frac{u}{R}} + \boxed{C\frac{du}{dt}}\right)}$$

On dérive l'équation obtenue :

$$0 = \frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + \frac{du}{dt}$$

Forme canonique : $\ddot{u} + \frac{3}{RC}\dot{u} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0$ on peut poser $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Rq : l'EDL demandée est sans 2nd membre → cela peut donner l'idée de dériver (1)

→ en régime permanent $u_\infty = 0$

2) $u(0^-) = u(0^+) = 0$ $\qquad u'(0) = u'(0^+) = 0$

(5) : $\frac{du}{dt}(0) = \frac{i_C}{C}(0) = \frac{i(0) - i_R(0)}{C}$

(1) $E = Ri(0) + \underbrace{u(0)}_{=0} + \underbrace{u'(0)}_{=0}$

$i(0) = \frac{E}{R}$

(2) $i_R(0) = \frac{u(0)}{R} = 0$

$\Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{RC}$

3) $\frac{\omega_0}{Q} = 3\omega_0 \Rightarrow Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ → régime apériodique

Solutions de l'équation caractéristique : $X_{\frac{1}{2}} = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

où $\Delta = (3\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2$

$X_{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$

$u(t) = A\exp(X_1 t) + B\exp(X_2 t)$

$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \quad A = -B$

$u(t) = A\left(\exp(X_1 t) - \exp(X_2 t)\right)$

$\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow A(X_1 - X_2) = \frac{E}{RC}$

$X_1 - X_2 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}\,\omega_0$

$A = \frac{E}{\sqrt{5}RC\omega_0} = \frac{E}{\sqrt{5}}$

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right) - \exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)\right)$$