Devoir surveillé n° 3

Durée : 3 heures

- ✓ *La calculatrice est autorisée*
- ✓ *Les réponses doivent être **justifiées**.*
- ✓ *Toute application numérique sans unité ne donnera aucun point.*
- ✓ ***Critères de présentation** : un malus sera attribué à la copie sur le total selon la règle suivante, -1 si 1 ou 2 critères non respectés, -2 si 3 ou 4, -3 si 5 ou 6.*

Critère	***Indicateur***
Lisibilité de l'écriture	*L'écriture ne ralentit pas la lecture.*
Respect de la langue	*La copie ne comporte pas (ou très peu) de fautes d'orthographe ou de grammaire.*
Clarté de l'expression	*Le raisonnement de l'élève est compréhensible dès la 1ère lecture*
Propreté de la copie	*La copie comporte peu de ratures, les parties à ne pas prendre en compte sont soigneusement barrées.*
Mise en évidence des résultats	*Résultats encadrés ou soulignés*
Identification des questions et pagination	*Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question. La pagination est correctement effectuée.*

Exercice 1 : Supercondensateur

On étudie quelques caractéristiques de condensateurs de grande capacité, dits supercondensateurs. On note C_0 la capacité d'un de ces condensateurs.

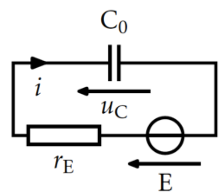
<u>*Données:*</u>
- *Capacité d'un supercondensateur C_0 = 3200 F,*
- *Tension maximale aux bornes d'un supercondensateur U_{max} = 2,85 V*

A. Charge d'un condensateur

On considère un circuit série formé d'un condensateur de capacité C_0, initialement déchargé, d'une résistance interne r_E = 1,00 Ω, d'un générateur de tension de force électromotrice $E = 2{,}00\ V$ et d'un interrupteur initialement ouvert. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

Q1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Q2. Introduire le temps caractéristique τ du circuit et faire son application numérique.



Q3. Établir l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Q4. Déterminer la durée nécessaire pour avoir la tension u_C supérieure à une valeur seuil $U_s = 1{,}75\ V$. Faire l'application numérique.

Q5. Déterminer également l'expression de l'intensité $i(t)$ traversant le condensateur.

Q6. Tracer les courbes $u_C(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps. Interpréter graphiquement l'influence du temps τ.

B. Charge d'un module

On considère une association de supercondensateurs équivalente à un condensateur unique de capacité C, appelé par la suite « module ».

Q7. Déterminer la capacité C nécessaire du module pour stocker une énergie de $E_n = 100\ MJ$ quand la tension aux bornes de celui-ci est $U_n = 500\ V$; faire l'application numérique.

On charge un module par un générateur de tension de force électromotrice E = 500 V et de résistance interne $r_E = 1{,}00\ \Omega$.

Q8. Déterminer l'ordre de grandeur de la durée de charge.

Q9. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $P_G(t)$ fournie par le générateur lors de la charge et en déduire la puissance maximale qu'il doit pouvoir fournir. Faire l'application numérique.

Q10. Déterminer l'énergie totale E_G fournie par le générateur lors de la charge complète du module. Faire l'application numérique.

Q11. Déterminer l'énergie totale E_e reçue par le module lors de sa charge complète. Faire l'application numérique.

Q12. En déduire l'énergie totale dissipée par effet Joule dans la résistance, E_J. Faire l'application numérique.

Q13. Déterminer le rendement de la charge : $\rho = \frac{E_C}{E_G}$. Faire l'application numérique.

On modifie le protocole de charge : dans un premier temps, on charge d'abord le module par un générateur de tension $\frac{E}{2}$, puis, quand la charge est quasi-totale, on remplace ce générateur par un générateur de tension E.

Q14. Donner, sans calculs mais en adaptant les résultats précédents, les expressions de la tension $u_C(t)$ et de l'intensité $i(t)$ lors de la première étape.

Après la première étape, on fait un changement d'origine des temps ; on prend $t = 0$ le moment où la force électromotrice du générateur bascule de $\frac{E}{2}$ à E.

Q15. Etablir l'expression de $u_C(t)$ pour cette seconde étape.

Q16. Etablir l'expression de $i(t)$ pour cette seconde étape.

Q17. Tracer l'allure de la tension $u_C(t)$ aux bornes du module au cours de ces deux étapes.

Q18. Déterminer l'énergie totale E'_e que reçoit au cours de l'ensemble des deux étapes le module.

Q19. Déterminer l'énergie E_{G1} fournie par le générateur lors de la première étape, puis l'énergie E_{G2} fournie par le générateur lors de la seconde étape charge complète du module, et enfin l'énergie totale E'_G que fournit le générateur au cours de l'ensemble des deux étapes.

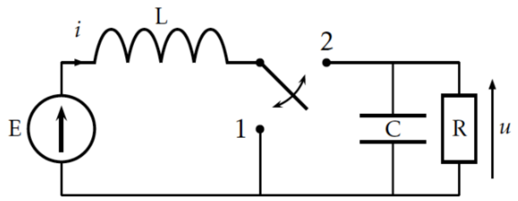
Q20. Déterminer le rendement de la charge : $\rho = \frac{E'_C}{E'_G}$. Faire l'application numérique.

Q21. Déterminer l'énergie totale dissipée par effet Joule dans la résistance, $E'_{J'}$ lors de la charge complète du module. Faire l'application numérique. Conclure.

Exercice 2 : Etude d'un hacheur

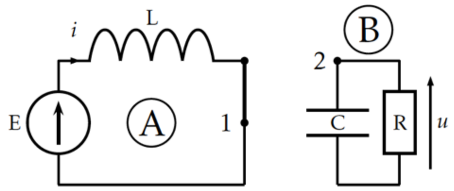
Un hacheur est un dispositif réalisant un générateur de tension quasi-stationnaire de tension u variable à partir d'un générateur de tension continue E fixée.

On étudie ici le montage particulier, nommé « convertisseur boost », représenté ci-dessous, comportant une source idéale de tension continue $E > 0$ et produisant une tension u quasi-stationnaire aux bornes de la résistance R d'utilisation.
L'interrupteur bascule entre deux positions (1) et (2).
La période du système est T, sur l'intervalle $t \in [0\,;T]$, l'interrupteur est en position 1 si $t \in [0; \alpha T[$ et en position 2 si $t \in [\alpha T; T[$.
Dans toute la suite, l'intensité du courant traversant la bobine sera notée i et la tension aux bornes du condensateur sera notée u.



On étudie le comportement général de ce circuit suivant la position de l'interrupteur.

L'interrupteur est à l'instant $t = 0$ en position 1. Le système est donc formé des deux circuits à une maille déconnectés représentés ci-contre, notés respectivement A et B.

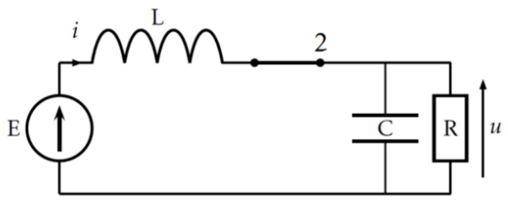


La tension u aux bornes du condensateur l'instant $t = 0$ est notée U_0 et l'intensité du courant traversant la bobine est notée I_0. On étudie l'évolution du système pour $t \in [0\,; \alpha T[$, jusqu'au basculement de l'interrupteur en position 2.

Q22. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ dans le circuit A et en déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de $I_0, L, E\ et\ t$. Déterminer en particulier l'expression de i à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note I_1.

Q23. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ dans le circuit B et en déduire l'expression de $u(t)$ en fonction de U_0, R, C et t. Déterminer en particulier l'expression de u à la fin de cette étape, quand $t = \alpha T$. On la note U_1.

À l'instant $t = \alpha T$, l'interrupteur bascule en position 2. Le système est alors celui représenté sur la figure ci-dessous.



Q24. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. On la mettra sous forme canonique, avec les constantes ω_0 et Q qu'on exprimera en fonction des constantes du problème.

Q25. Donner la forme générale de la solution dans l'hypothèse d'un régime pseudo-périodique, sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

Q26. Déterminer les valeurs de la tension u et de sa dérivée temporelle du/dt immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1.

Q27. Déterminer de même les valeurs de l'intensité i et de sa dérivée temporelle di/dt immédiatement après la commutation. On les exprimera entre autres à l'aide des valeurs U_1 et I_1.

Q28. À quelles conditions portant sur U_1, I_1 et les paramètres du circuit a-t-on :

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=\alpha T^+} < 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\alpha T^+} > 0 \quad ?$$

On admet dans la suite que ces conditions sont vérifiées.

Q29. Tracer $u(t)$ sur la période $[0\,;T]$ pour Q = 5.

Q30. On admet que l'intensité i vérifie une équation différentielle de la même forme :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$$

avec les mêmes ω_0 et Q que pour l'équation différentielle vérifiée par u. Déterminer l'expression de i_∞.

Q31. Tracer $i(t)$ sur la période $[0\,;T]$ pour Q = 5.

Afin que la tension u soit quasi-stationnaire, le hacheur est utilisé dans un régime où la période T de commutation est très petite devant les échelles de temps caractéristiques des circuits. On peut donc utiliser des approximations linéaires des variations de u et i durant chaque étape. Après une date t_0, on écrira : $u(t) = u(t_0) + \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0^+}(t - t_0)$ et $i(t) = i(t_0) + \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=t_0^+}(t - t_0)$.

Q32. Déterminer alors l'expression de $i(t)$ sur l'intervalle $[\alpha T; T[$.

Q33. Déterminer l'expression de $u(t)$ sur l'intervalle $[0\,; \alpha T[$.

Q34. Déterminer l'expression de $u(t)$ sur l'intervalle $[\alpha T\,; T[$.

On suppose dans toute la suite qu'un régime périodique de période T est établi.

Q35. Que doivent alors valoir $u(T)$ et $i(T)$?

Q36. En déduire l'expression de U_1 en fonction de E et de α.

Q37. En déduire l'expressions de U_0 en fonction de E, α et du quotient $T\ /\ RC$.

Q38. Calculer le taux d'ondulation défini par $\frac{U_0 - U_1}{U_0}$. Justifier qu'on peut réaliser ainsi une source de tension quasi-stationnaire qui élève la tension de la source idéale E. *On ne cherchera pas à calculer* I_0 *et* I_1.

Q39. Exprimer l'énergie électrique E_{m1} reçue par la bobine sur l'intervalle $[0\,;\alpha T[$ et l'énergie E_{m2} qu'elle reçoit pendant l'intervalle $[\alpha T; T[$ en fonction de I_0 et I_1. Que vaut la somme $E_{m1} + E_{m2}$ sur une période T ?

Q40. Que vaut la somme $E_{e1} + E_{e2}$ des énergies électriques reçues par le condensateur dans les mêmes conditions, sur une période ?

Q41. En déduire une relation entre l'énergie électrique E_g fournie par le générateur et l'énergie électrique E_J reçue par le résistor pendant une période.

Q42. En prenant en compet que la tension u est quasi -constante, à la valeur U_0, déterminer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

Résolution de problème : Des tours qui chavirent

Un bâtiment n'est jamais totalement rigide. Tel un roseau il peut osciller sous l'effet des rafales de vent. La fréquence des oscillations est de l'ordre de 0.2 Hz pour un gratte-ciel. Ces oscillations risquent d'endommager la structure.

On s'intéresse à la tour Citicorp à New-York haute de 279 m pour 59 étages. En l'absence de dispositif adapté, la tour oscille avec une période de 6,5 s et l'amplitude de ces oscillations ne diminue que de 1 % par cycle. Il faut une bonne dizaine de minutes pour que la vibration s'éteigne d'elle-même. Or pendant cet assez long laps de temps, des forces extérieures telles que les rafales de vent peuvent entretenir les oscillations, voire les amplifier par résonance.

La minimisation des oscillations provoquées par le vent est une difficulté à laquelle sont confrontés les concepteurs de structures de génie civil (ponts, viaducs, antennes …).

Pour limiter les oscillations, on a installé au sommet du gratte-ciel un oscillateur résonant muni d'un dispositif d'amortissement : il s'agit d'une masse de 400 t placée sur une couche d'huile et reliée aux murs par des ressorts et des amortisseurs. Ce dispositif est appelé « Tuned Mass Damper » (TMD). L'oscillateur est généralement dissimulé au sommet de la structure et est couplé au mouvement de cette dernière, de telle manière que, idéalement, il oscille en opposition de phase avec elle et « détourne » ainsi de l'énergie. Grâce à ce dispositif, l'atténuation des oscillations est de 5 % par cycle.

Source : Pour la science –Idées de physique - Des tours qui chavirent

Q43. A partir d'hypothèses et d'une modélisation que vous détaillerez, estimer le facteur de qualité en l'absence et en présence du dispositif TMD.